

# Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

## Esercizi - Foglio 9 - Soluzioni

### Gruppo 2.

#### Esercizio 1.

(a)  $\Phi$  è  $\mathbb{R}$ -lineare.

Infatti,  $\phi_{A+A'}(B) = \text{tr}((A + A')B) = \text{tr}(AB + A'B) = \text{tr}(AB) + \text{tr}(A'B) = \phi_A(B) + \phi_{A'}(B)$  e quindi  $\Phi(A + A') = \Phi(A) + \Phi(A')$ . Inoltre,  $\phi_{\lambda A}(B) = \text{tr}((\lambda A)B) = \text{tr}(\lambda AB) = \lambda \text{tr}(AB) = \lambda \phi_A(B)$  e quindi  $\Phi(\lambda A) = \lambda \Phi(A)$ .

$\Phi$  è iniettiva e quindi invertibile (perché dominio e codominio hanno la stessa dimensione finita, ossia  $n^2$ ).

Infatti, se  $E_{ij}$  è la matrice che ha tutti zeri tranne un 1 al posto  $(i, j)$ , un calcolo diretto ci dà

$$\phi_A(E_{ij}) = \text{tr}(AE_{ij}) = A_{ji}$$

Quindi  $\Phi(A) = 0 \iff \phi_A(X) = 0$  per ogni  $X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \implies A_{ji} = \phi_A(E_{ij}) = 0$  per ogni  $1 \leq i, j \leq n \iff A = 0$ , il che dimostra l'iniettività di  $\Phi$ .

(b)  $\Psi$  non è lineare.

Infatti,  $\psi_{\lambda A}(B) = \text{tr}((\lambda A)^T B (\lambda A)) = \text{tr}(\lambda^2 A^T B A) = \lambda^2 \text{tr}(A^T B A) = \lambda^2 \psi_A(B)$  e dunque  $\Psi(\lambda A) = \lambda^2 \Psi(A) \neq \Psi(A)$  (la disuguaglianza vale, per esempio, quando  $A = I_n$  e  $\lambda \neq 0, 1$ ).

#### Esercizio 2.

(a) Sia  $[v_1] \in V_1/(W \cap V_1)$  e sia  $[v_2] \in V_2/(W \cap V_2)$ . Sia inoltre  $v'_1 \sim v_1$  e  $v'_2 \sim v_2$ , cosicché  $[v_1] = [v'_1]$  e  $[v_2] = [v'_2]$ . Vogliamo dimostrare che le classi  $[v_1 + v_2]$  e  $[v'_1] + [v'_2]$  determinano lo stesso vettore in  $V/W$ .

Poiché  $v'_1 \sim v_1$ , esiste  $w_1 \in W \cap V_1$  tale che  $v'_1 = v_1 + w_1$ . Poiché  $v'_2 \sim v_2$ , esiste  $w_2 \in W \cap V_2$  tale che  $v'_2 = v_2 + w_2$ . Allora  $v'_1 + v'_2 = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) = (v_1 + v_2) + (w_1 + w_2)$ . Dato che  $w_1 + w_2 \in W$ , concludiamo che  $[v'_1 + v'_2] = [v_1 + v_2]$  come vettori in  $V/W$  e dunque  $F$  è ben definita.

- (b)  $F$  è suriettiva: infatti, se  $[v] \in V/W$ , allora  $v = v_1 + v_2$  con  $v_1 \in V_1$  e  $v_2 \in V_2$  e quindi  $F([v_1], [v_2]) = [v]$ . Dunque l'immagine ha dimensione  $\dim(V/W) = d_1 + d_2 - s$ .

Poiché  $\dim(V_k/(W \cap V_k)) = d_k - r_k$  e  $\dim(V_1/(W \cap V_1) \times V_2/(W \cap V_2)) = (d_1 + d_2) - (r_1 + r_2)$ , concludiamo che  $\dim(\ker(F)) = s - (r_1 + r_2)$ .

Per capire esplicitamente chi è  $\ker(F)$ , procediamo come segue. Siano  $[v_1] \in V_1/(W \cap V_1)$  e  $[v_2] \in V_2/(W \cap V_2)$  tali che  $F([v_1], [v_2]) = [0]$ . Questo succede se e solo se  $v_1 + v_2 \in W$ : chiamiamo  $w = v_1 + v_2$ . In effetti, fissato  $w \in W$ , esistono *unici*  $v_1 \in V_1$  e  $v_2 \in V_2$  tali che  $w = v_1 + v_2$ . Dunque l'immagine di

$$\begin{array}{ccc} \Psi : W & \longrightarrow & V_1 \oplus V_2 \cong V_1 \times V_2 \longrightarrow (V_1/(W \cap V_1)) \times (V_2/(W \cap V_2)) \\ w & \longmapsto & (v_1, v_2) \longmapsto ([v_1], [v_2]) \end{array}$$

è esattamente  $\ker(F)$ .

- (c)  $F$  è suriettiva, dunque una qualunque base di  $V/W$  è una base di  $\text{Im}(F)$ . Poiché  $\{\phi_1, \phi_2\}$  è un insieme linearmente indipendente,  $\dim(W) = 5 - 2 = 3$  e quindi  $\dim(V/W) = 2$ .

Sia  $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$  la bse canonica di  $\mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ . L'applicazione  $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$  definita come

$$\Phi(p(t)) = \begin{pmatrix} \phi_1(p(t)) \\ \phi_2(p(t)) \end{pmatrix}$$

ha esattamente  $\ker(\Phi) = W$ . Un calcolo diretto ci dà

$$F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque  $W$  ha come base per esempio  $\{1, t^3 - 3, t^4 - 4\}$ . Essa si completa ad una base di  $V$  aggiungendo per esempio  $\{t, t^2\}$ . Quindi una base di  $V/W$ , ovvero di  $\text{Im}(F)$ , è  $\{[t], [t^2]\}$ .

Per determinare una base del nucleo, calcoliamo l'immagine dell'applicazione  $\Psi$  del punto precedente.  $\Psi(1) = \Psi(1+0) = ([1], [0]) = ([0], [0])$ , perché  $1 \in W$ .  $\Psi(t^3 - 3) = \Psi(-3 + t^3) = ([-3], [t^3]) = ([0], [t^3])$ . E infine  $\Psi(t^4 - 4) = \Psi(t^4 - 4 + 0) = ([t^4 - 4], [0]) = ([0], [0])$ .

Concludiamo che una base di  $\ker(F) = \text{Im}(\Psi)$  è data da  $\{([0], [t^3])\}$ , e quindi  $\dim \ker(F) = 1$ .

In effetti,  $s = 3$ ,  $d_1 = 3$ ,  $d_2 = 2$ ,  $r_1 = 2$  e  $r_2 = 0$ , quindi  $\dim(\ker(F)) = s - (r_1 + r_2) = 3 - (2 + 0) = 1$ .