Corso di geometria (per fisici)

Anno accademico 2009/2010

Esercizi - Foglio 8

Gruppo 1.

Esercizi 9.2-9.8-9.9-9.10-9.11-9.13-9.15-9.16-(9.17-9.18 dopo che abbiamo definito la matrice dei cofattori)-9.20-9.21.

Gruppo 2.

Esercizio 1.

Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V, con $v_1 = 2t^2 - 3$, $v_2 = 2 + t$, $v_3 = t^2 + t^3$, $v_4 = t^3$. Siano $\phi_1, \phi_2 \in V^*$ i funzionali definiti come $\phi_1(p(t)) = p(2)$ e $\phi_2(p(t)) = p'(1)$ (dove $p'(t)$ è la derivata di $p(t)$).

(a) Trovare le coordinate di ϕ_1 e ϕ_2 rispetto a $\mathcal{B}^*$.

(b) Trovare una base $\mathcal{C}$ dell'annullatore di $\{\phi_1, \phi_2\}$.

(c) Completare tale $\mathcal{C}$ ad una base di V.

Esercizio 2.

Sia $V = \mathbb{R}[t]$ e sia $W_k = \operatorname{span}\{t^h \,|\, h \geq k\} \subset V$ per ogni $k \geq 0$. Sia $D : V \longrightarrow V$ la derivata, ossia $D(p(t)) = p'(t)$.

(a) Dimostrare che D non è invertibile e che, per ogni $p(t) \in V$, esiste un $n > 0$ (dipendente da $p(t)$), tale che $D^n(p(t)) = 0$.

(b) Dimostrare che l'equazione

$$D(p(t)) = p(t)$$

è soddisfatta solo quando $p(t)$ è il polinomio nullo.

(c) Dimostrare che, per ogni k, esiste un'applicazione

$$\pi_k : V/W_{k+1} \longrightarrow V/W_k$$

tale che $\pi_k(p(t) + W_{k+1}) = p(t) + W_k$ *(ricordiamo che $p(t) + W_h$ è un elemento di V/W_h).*

(d) Dire se D induce un'applicazione lineare

$$\overline{D}_k : V/W_{k+1} \longrightarrow V/W_k$$

e dimostrare che

$$\mathrm{ev}_0 : V/W_{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da $\mathrm{ev}_0([p(t)]) = p(0)$ è ben definita per ogni $k \geq 0$.

(e) Dimostrare che, per ogni k, esiste un unico $\alpha_k \in V/W_{k+1}$ tale che

$$\begin{cases} \overline{D}_k(\alpha_k) = \pi_k(\alpha_k) \\ \mathrm{ev}_0(\alpha_k) = 1 \end{cases}$$

e determinarlo esplicitamente.

(f) Dimostrare che $\pi_k(\alpha_k) = \alpha_{k-1}$.

(g) Esprimere le vostre considerazioni sugli α_k trovati.