

# Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

## Esercizi - Foglio 8 - soluzioni

### Gruppo 2.

#### Esercizio 1.

Scriviamo  $\phi_1 = a_1v_1^* + a_2v_2^* + a_3v_3^* + a_4v_4^* \in V^*$ . Valutando entrambi i membri di questa uguaglianza in  $v_1$  si ottiene  $5 = \phi_1(v_1) = a_1$ . In modo simile si ottiene  $a_2 = \phi_1(v_2) = 4$ ,  $a_3 = \phi_1(v_3) = 12$  e  $a_4 = \phi_1(v_4) = 8$ . Dunque

$$F^{\mathcal{B}^*}(\phi_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Allo stesso modo per  $\phi_2$  otteniamo

$$F^{\mathcal{B}^*}(\phi_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Per trovare  $\text{Ann}(\phi_1, \phi_2)$ , definiamo  $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  come

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

in modo che  $\text{Ann}(\phi_1, \phi_2) = \ker(\Phi)$ .

L'applicazione  $\Phi \circ F_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  è rappresentata da una matrice, che chiameremo  $M$ . Avremo  $\ker(\Phi) = F_{\mathcal{B}}(\ker(M))$ .

La colonna  $k$  della matrice  $M$  è data da

$$M \cdot e_k = \Phi(F_{\mathcal{B}}(e_k)) = \Phi(v_k) = \begin{pmatrix} \phi_1(v_k) \\ \phi_2(v_k) \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 12 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

La riduzione di Gauss-Jordan (usata in modo leggermente più astuto) ci produce una  $M'$  del tipo seguente

$$M' = \begin{pmatrix} -11/4 & 0 & 2 & 1 \\ -17/4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base del  $\ker(M)$  è data da

$$\left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

e quindi una base di  $\ker(\Phi)$  è data da  $\{q_1 = F_{\mathcal{B}}(w_1), q_2 = F_{\mathcal{B}}(w_2)\}$ , dove  $F_{\mathcal{B}}(w_1) = 4v_1 + 17v_2 - 11v_4 = 22 + 17t + 8t^2 - 11t^3$  e  $F_{\mathcal{B}}(w_2) = v_2 + v_3 - 2v_4 = 2 + t + t^2$ .

Notiamo che possiamo completarla alla base  $\{q_1, q_2, 1, t\}$  di  $V$ , in quanto questi sono evidentemente generatori (perché generano  $1, t, t^2, t^3$ ) e sono il numero giusto.

**Esercizio 2.**

Sia  $V = \mathbb{R}[t]$  e sia  $W_k = \text{span}\{t^h \mid h \geq k\} \subset V$  per ogni  $k \geq 0$ . Sia  $D : V \rightarrow V$  la derivata, ossia  $D(p(t)) = p'(t)$ .

- (a)  $D$  non è invertibile in quanto  $D(1) = 0$ . Chiaramente, se  $p(t)$  è un polinomio non nullo, di grado  $d > 0$ , allora  $D(p(t))$  ha grado  $d - 1$ . Concludiamo che  $D^{d+1}(p(t)) = 0$ .
- (b) Per l'osservazione (a), il grado di un  $p(t)$  che soddisfi  $D(p(t)) = p(t)$  non può essere maggiore di zero. D'altra parte, se  $p(t)$  non è nullo e ha grado zero, allora  $0 = D(p(t)) \neq p(t)$ . Dunque, l'unica soluzione è data dal polinomio nullo.
- (c) Consideriamo la proiezione canonica  $c_k : V \rightarrow V/W_k$ . Allora l'esistenza di  $\pi_k$  è garantita dal primo teorema di omomorfismo (applicato a  $c_k$ ), in quanto  $W_k = \ker(c_k) \supseteq W_{k+1}$ .
- (d) Consideriamo la composizione  $c_k \circ D : V \rightarrow V/W_k$ . L'esistenza di  $\bar{D}_k$  è ancora garantita dal primo teorema di omomorfismo (applicato a  $c_k \circ D$ ), in quanto  $\ker(c_k \circ D) = D^{-1}(W_k) = W_{k+1}$  è contenuto dentro  $W_{k+1}$ .

Inoltre, l'esistenza di  $ev_0 : V/W_{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$  per  $k \geq 0$  segue ancora una volta dal primo teorema di omomorfismo applicato a  $f_0 : V \longrightarrow \mathbb{R}$  data da  $f_0(p(t)) = p(0)$ . Infatti,  $\ker(f_0) = W_1 \supseteq W_{k+1}$  per  $k \geq 0$ .

- (e) Sia  $\alpha_k = b_0 + b_1t + \cdots + b_k t^k + W_{k+1}$ . Per prima cosa,  $0 = ev_0(\alpha_k) = b_0$ . Inoltre,  $\overline{D}_k(\alpha_k) = b_1 + 2b_2t + 3b_3t^2 + \cdots + kb_k t^{k-1} + W_k$ , mentre  $\pi_k(\alpha_k) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_{k-1}t^{k-1} + W_k$ . Dal confronto, otteniamo  $b_h = b_{h-1}/h$  per ogni  $h = 1, \dots, k$ . Quindi  $b_0 = 1$  e  $b_h = \frac{1}{h!}$ .

Dunque  $\alpha_k$  è univocamente determinata e

$$\alpha_k = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + W_{k+1}$$

- (f) Dall'espressione trovata in (e) è chiaro che  $\pi_k(\alpha_k) = \alpha_{k-1}$ .
- (g) Abbiamo trovato lo sviluppo di Taylor in 0 della funzione esponenziale  $t \mapsto e^t$ .