

Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

Esercizi - Foglio 7

Gruppo 1.

Esercizi 8.19-8.21 del libro di esercizi.

Gruppo 2.

Esercizio 1.

- (a) Siano $\phi_1 = 3e_1^* - 2e_2^* + e_3^*$ e $\phi_2 = -2e_1^* + e_2^* + e_3^*$ elementi di $(\mathbb{R}^3)^*$.
Calcolare l'annullatore di $\{\phi_1, \phi_2\}$.
- (b) Sia $W = \text{span}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{C}^4$, dove $v_1 = 4e_1 - e_3 + e_4$, $v_2 = (1+i)e_1 - e_2 + ie_4$, $v_3 = (2-2i)e_1 + 2e_2 - e_3 + (1-2i)e_4$ sono vettori di \mathbb{C}^4 .
Calcolare l'annullatore di W .

Esercizio 2.

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ data dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Verificare che $\text{Ann}(\text{Im}(f)) = \ker(f^*)$ e che $\text{Ann}(\text{Im}(f^*)) = \ker(f)$.

Esercizio 3.

Siano $V, W \subset \mathbb{R}^4$ sottospazi vettoriali definiti nel modo seguente:

$$V = \text{span}(v_1, v_2) \quad \text{dove } v_1 = e_1 - 2e_3 + e_4, \quad v_2 = -e_1 + 3e_2 + 2e_4$$

$$W = \{w = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 \in \mathbb{R}^4 \mid 2a_1 - a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\}$$

Verificare che $\text{Ann}(V) + \text{Ann}(W) = \text{Ann}(V \cap W)$ e che $\text{Ann}(V + W) = \text{Ann}(V) \cap \text{Ann}(W)$.

Esercizio 4.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n (su \mathbb{K}) e sia $f : V \rightarrow V$ una applicazione lineare non nulla. Dimostrare che esiste $g : V \rightarrow V$ lineare tale che $g \circ f$ non è identicamente nulla e $(g \circ f)^2 = g \circ f$.

Esercizio 5.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n (su \mathbb{K}) e sia $f : V \rightarrow V$ una applicazione lineare tale che $f^2 = id_V$. Si supponga che esistano due sottospazi vettoriali $H, K \subset V$ tali che

$$V = H \oplus K, \quad f(H) \subseteq K, \quad f(K) \subseteq H$$

Dimostrare che esiste una base \mathcal{B} di V tale che

$$F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 0_m & I_m \\ \hline I_m & 0_m \end{array} \right)$$

e $n = 2m$.

Esercizio 6.^(*)

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e siano f_1, \dots, f_k, g elementi dello spazio duale V^* . Dimostrare che

$$\exists a_i \in \mathbb{K} \text{ tali che } g = \sum_{i=1}^k a_i f_i \iff \bigcap_{i=1}^k \ker(f_i) \subseteq \ker(g).$$

Esercizio 7.

Costruire, se esiste, una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tale che

$$\text{Im}(f) \supseteq \{A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid \text{rg}(A) = 2\}.$$

Esercizio 8.

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione n e sia $f : V \rightarrow V$ un'applicazione \mathbb{K} -lineare. Supponiamo che $W \subset V$ sia un sottospazio vettoriale f -invariante, ossia tale che $f(W) \subseteq W$. Chiamiamo $g := f|_W^W : W \rightarrow W$.

- (a) Dimostrare che è ben definita una $\bar{f} : V/W \rightarrow V/W$ lineare tale che $\bar{f}([v]) = [f(v)]$.
- (b) Dimostrare che f è invertibile $\iff \bar{f}$ e g sono invertibili.
- (c) Dimostrare che f è nilpotente $\iff \bar{f}$ e g sono nilpotenti.
- (d) Dimostrare che $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(\bar{f}) + \text{Tr}(g)$.
- (e) Dimostrare che $\text{rg}(f) \geq \text{rg}(\bar{f}) + \text{rg}(g)$. Esibire un esempio nel quale non vale l'uguaglianza.