# Corso di geometria (per fisici)

Anno accademico 2009/2010

**Esercizi - Foglio 7 - Soluzioni**

**Gruppo 2.**

**Esercizio 4.**

Sia $W$ un supplementare di $\ker(f)$, ovvero $V = W \oplus \ker(f)$. Allora $f|_W^{f(W)} : W \longrightarrow f(W)$ è iniettiva (perché $\ker(f|_W^{f(W)}) = W \cap \ker(f) = \{0\}$) e suriettiva, e quindi invertibile. Sia $h = (f|_W^{f(W)})^{-1} : f(W) \to W \subset V$ la sua inversa.

Infine, sia $U$ un supplementare di $f(W)$ in $V$, ossia $V = f(W) \oplus U$. Definiamo $g : V \to V$ in modo che $g(U) = 0$ e $g|_{f(W)} = h$. Allora $(g \circ f)(\ker(f)) = 0$ e $(g \circ f)|_W = h \circ f_W = id_W$, e quindi $g \circ f$ è una proiezione, ossia $(g \circ f)^2 = (g \circ f)$.

Poiché $f$ non è nulla, allora $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(W) = \dim(f(W)) > 0$ e quindi la $g$ così definita e la $(g \circ f)$ non sono nulle.

**Esercizio 5.**

Poiché $f^2 = id_V$, allora $f^{-1} = f$ e quindi $f$ è invertibile.

Prendiamo una base qualunque $\mathcal{B}_H = \{v_1, \ldots, v_m\}$ di $H$ e siano $w_i = f(v_i) \in K$. Dimostriamo ora che $\mathcal{B}_K = \{w_1, \ldots, w_m\}$ è una base di $K$. Certamente sono linearmente indipendenti, perché $w_i = f(v_i)$ e $f$ è iniettiva. Inoltre, se $f(K) \subseteq H$ e quindi $\dim(K) = \dim(f(K)) = \dim(H) = m$ (perché $f$ è iniettiva).

Dunque, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_m\}$ è una base di $V$ (perché $V = H \oplus K$) e quindi $v = 2m$. Inoltre

$$F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot e_i = \begin{cases} F^{\mathcal{B}}(f(v_i)) = F^{\mathcal{B}}(w_i) = e_{m+i} & \text{se } 1 \leq i \leq m \\ F^{\mathcal{B}}(f(w_{i-m})) = F^{\mathcal{B}}(v_i) = e_i & \text{se } m+1 \leq i \leq 2m \end{cases}$$

e quindi $F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ha la forma voluta.

**Esercizio 6.**

Sia $R = \{f_1, \dots, f_k\} \subset V^*$. L'enunciato si può riformulare come

$$g \in \operatorname{span}(R) \iff \bigcap_i (\operatorname{Ann}(f_i)) \subset \operatorname{Ann}(g)$$

Riconosciamo subito che

$$\bigcap_i (\operatorname{Ann}(f_i)) = \operatorname{Ann}(R)$$

Quindi l'enunciato diventa

$$\{g\} \subseteq \operatorname{span}(R) \iff \operatorname{Ann}(g) \supseteq \operatorname{Ann}(R)$$

che abbiamo dimostrato in classe.

**Esercizio 7.**

No, tale $f$ non esiste. Infatti, dimostreremo che, posto $X := \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \,|\, \operatorname{rg}(A) = 2\}$, si ha

$$\operatorname{span}(X) = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

che ha dimensione 9 e quindi $f$ non sarà mai suriettiva.

Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, numeriamo le sue colonne e le sue righe con $i, j \in \mathbb{Z}/3$. (Questo vuol dire semplicemente che, se scriviamo "la riga 4", intendiamo "la riga 1", se scriviamo "la colonna 5", intendiamo "la colonna 2", e così via.)

Consideriamo le matrici $F_{i,j} = E_{i,j} + E_{i,j+1} + E_{i+i,j+1}$ e $G_{i,j} = E_{i,j} + E_{i+i,j+1}$, per $i, j \in \mathbb{Z}/3$. Queste 18 matrici $\{F_{i,j}, G_{i,j}\}$ hanno tutte rango 2 e quindi appartengono a $X$. Inoltre $F_{i,j} - G_{i,j} = E_{i,j+1}$. Dunque, la base canonica $\{E_{i,j}\}$ è contenuta nello $\operatorname{span}(X)$, che quindi coincide con $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

**Esercizio 8.**

Fatto in classe, tranne il punto (e).

Un argomento "astratto" (ovvero, senza usare le coordinate) per il punto (e) è il seguente.

Sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base di $\operatorname{Im}(g) \subset W$, dove $k = \operatorname{rg}(g)$. Inoltre, se $h = \operatorname{rg}(\overline{f})$, sia $\{\alpha_1, \dots, \alpha_h\}$ una base di $\operatorname{Im}(\overline{f}) \subset V/W$. Questo vuol dire che, per ogni $i = 1, \dots, h$, $\alpha_i = \overline{f}([v_i]) = [f(v_i)]$ per un certo $v_i \in V$.

Per l'indipendenza di $\{\alpha_1, \dots, \alpha_h\}$, anche $\{f(v_1), \dots, f(v_h)\} \subset V$ sono linearmente indipendenti.

Chiaramente, $S := \{w_1, \dots, w_k, f(v_1), \dots, f(v_h)\} \subset \mathrm{Im}(f)$. Se dimostriamo che $S$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, concludiamo che $\mathrm{rg}(g) + \mathrm{rg}(\overline{f}) = k + h \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$.

Se

$$a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k + b_1 f(v_1) + \cdots + b_h f(v_h) = 0 \in V$$

con $a_i, b_j \in \mathbb{K}$, allora

$$b_1 f(v_1) + \cdots + b_h f(v_h) = -a_1 w_1 + \cdots - a_k w_k \in W$$

Applicando $\pi$ otteniamo

$$b_1 [f(v_1)] + \cdots + b_h [f(v_h)] = 0 \in V/W$$

e quindi $b_1 = \cdots = b_h = 0$ per l'indipendenza di $\{\alpha_1, \dots, \alpha_h\}$. Ne segue che

$$a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k = 0 \in W$$

e quindi $a_1 = \cdots = a_k = 0$ per l'indipendenza di $\{w_1, \dots, w_k\}$. Dunque $S$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.