

# Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

## Esercizi - Foglio 5b

### Gruppo 3.

#### Esercizio 1.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e  $\text{End}(V)$  l'insieme delle applicazioni  $\mathbb{K}$ -lineari  $f : V \rightarrow V$  (dette anche *endomorfismi di  $V$* ). Dimostrare che  $(\text{End}(V), +, \circ)$  è una  $\mathbb{K}$ -algebra associativa con unità (il che vuol dire che  $(\text{End}(V), +)$  è un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale, che  $\circ$  è associativa ed esiste un elemento neutro per  $\circ$ , e che vale la proprietà distributiva), dove  $+$  è la somma di applicazioni e  $\circ$  è la composizione. Dedurre che  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  è una  $\mathbb{K}$ -algebra associativa con unità.

#### Esercizio 2.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  e sia  $\text{GL}(V) \subset \text{End}(V)$  il sottoinsieme delle applicazioni  $\mathbb{K}$ -lineari  $f : V \rightarrow V$  invertibili. Dimostrare che  $(\text{GL}(V), \circ)$  è un gruppo. È vero che  $\text{GL}(V) \subset \text{End}(V)$  è un sottospazio vettoriale? È vero che  $\text{End}(V) \setminus \text{GL}(V) \subset \text{End}(V)$  è un sottospazio vettoriale?

#### Esercizio 3.

(a) Sia  $M$  una matrice  $m \times n$  del tipo seguente

$$M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

dove  $A$  è una matrice  $h \times k$ ,  $B$  è una matrice  $h \times (n - k)$ ,  $C$  è una matrice  $(m - h) \times k$  e  $D$  è una matrice  $(m - h) \times (n - k)$ . Chiamiamo  $A, B, C, D$  i *blocchi* della matrice  $M$ .

Analogamente, sia  $N$  una matrice  $p \times n$  del tipo seguente

$$N = \left( \begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array} \right)$$

dove  $E$  è una matrice  $k \times r$ ,  $F$  è una matrice  $k \times (p - r)$ ,  $C$  è una matrice  $(n - k) \times r$  e  $D$  è una matrice  $(n - k) \times (p - r)$ .

Dimostrare che si può fare il prodotto a blocchi, ossia che

$$MN = \left( \begin{array}{c|c} AE + BG & AF + BH \\ \hline CE + DG & CF + DH \end{array} \right)$$

- (b) Supponendo  $C = 0$ ,  $n = m$ ,  $h = k$ , dimostrare che  $M$  è invertibile se e solo se le matrici quadrate  $A$  e  $D$  sono entrambe invertibili. In tal caso, dimostrare che  $M^{-1}$  ha una struttura a blocchi analoga a quella di  $M$  e determinare  $M^{-1}$  (in funzione di  $A$ ,  $B$  e  $D$ ).

**Esercizio 4.**

Sia  $A_k = \{M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \text{rg}(M) \leq k\}$ . È  $A_k$  un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ? Se sì, qual è la dimensione di  $A_k$ ? Se no, qual è la dimensione di  $\text{span}(A_k)$ ?