Corso di geometria (per fisici)

Anno accademico 2009/2010

Esercizi - Foglio 5b - Soluzioni

Gruppo 3.

Esercizio 1.

Sappiamo già che $\mathrm{End}(V)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Inoltre, la composizione di applicazioni è associativa e l'elemento neutro è l'identità $id_V \in \mathrm{End}(V)$. Resta da dimostrare la proprietà associativa fra moltiplicazione e composizione, ossia che $\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f, g \in \mathrm{End}(V)$; e la proprietà distributiva $(f + g) \circ (h + r) = f \circ h + f \circ r + g \circ h + g \circ r$ per ogni $f, g, h, r \in \mathrm{End}(V)$.

Lasciamo queste dimostrazioni per esercizio.

Ne segue che, quando $V = \mathbb{K}^n$, $\mathrm{End}(V) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ è una $\mathbb{K}$-algebra associativa con unità.

Esercizio 2.

Dall'esercizio 1, $(\mathrm{GL}(V), \circ)$ è associativo e id_V è l'elemento neutro. Inoltre, ogni elemento in $\mathrm{GL}(V)$ è invertibile per definizione, quindi $(\mathrm{GL}(V), \circ)$ è un gruppo.

Poiché $0 \notin \mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{GL}(V)$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$.

Nemmeno $\mathrm{End}(V) \setminus \mathrm{GL}(V)$ è un sottospazio vettoriale. In effetti, sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale non banale (ossia $W \neq \{0\}, V$) e sia $Z \subset V$ un suo supplementare, cosicché $V = W \oplus Z$ (e $Z \neq \{0\}, V$). Siano $\pi_W, \pi_Z : V \to V$ le proiezioni tali che $\ker(\pi_W) = \Im(\pi_Z) = Z$ e $\ker(\pi_Z) = \Im(\pi_W) = W$. Chiaramente, π_W, π_Z non sono invertibili e quindi $\pi_W, \pi_Z \in \mathrm{End}(V)\setminus\mathrm{GL}(V)$. D'altra parte, $\pi_W + \pi_Z = id_V \in \mathrm{GL}(V)$. Quindi $\mathrm{End}(V)\setminus\mathrm{GL}(V)$ non è chiuso per la somma.

Esercizio 3.

(a) Che si possa fare il prodotto a blocchi, si verifica direttamente. È lasciato come esercizio.

(b) Siano $C = 0$, $n = m$ e $h = k$. Allora

$$MN = \left(\begin{array}{c|c} AE + BG & AF + BH \\ \hline DG & DH \end{array}\right)$$

Affinché $N = M^{-1}$, deve aversi $H = D^{-1}$ e dunque D deve essere invertibile. Inoltre, poiché D è invertibile, $DG = 0 \implies G = 0$. Ne segue che deve aversi $E = A^{-1}$, e quindi anche A deve essere invertibile e $F = -A^{-1}BD^{-1}$. In conclusione,

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ \hline 0 & D^{-1} \end{array}\right)$$

Esercizio 4.

Chiaramente, $A_0 = \{0\}$ e $A_n = \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ sono sottospazi vettoriali di dimensione 0 e n^2.

Abbiamo già dimostrato nell'esercizio 2 che A_{n-1} non è un sottospazio vettoriale. Dimostriamo che $\mathrm{span}(A_k) = \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ per ogni $k \geq 1$: ne seguirà anche che A_k non è un sottospazio vettoriale per $1 \leq k \leq n-1$ (essendo $A_k \neq \mathrm{span}(A_k)$).

Le matrici $\mathcal{B} = \{E_{ij} \,|\, 1 \leq i,j \leq n\}$ sono una base di $\mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$, dove $E_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i$ e δ_{jk} è la delta di Kronecker e $\{e_i\}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Inoltre $\mathcal{B} \subset A_1$, dunque $\mathrm{End}(\mathbb{K}^n) = \mathrm{span}(A_1) \subset \mathrm{span}(A_k)$ e quindi $\mathrm{span}(A_k) = \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ per ogni $k \geq 1$.

Si può anche dimostrare che $\mathrm{span}(A_k \setminus A_{k-1}) = \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$ per ogni $2 \leq k \leq n$. È sufficiente dimostrare che $\mathcal{B} \subset \mathrm{span}(A_k \setminus A_{k-1})$.

Anziché numerare le righe e le colonne con i numeri $1, 2, \ldots, n$, numeriamole con elementi di $\mathbb{Z}/n$. Fissati $2 \leq k \leq n$ e $1 \leq i,j \leq n$, definiamo $\widetilde{E}_{i,j} := E_{i,j} + \sum_{h=0}^{k-1} E_{i-1+h,j+h}$ e $\widehat{E}_{i,j} := \sum_{h=0}^{k-1} E_{i-1+h,j+h}$. È facile vedere che $\mathrm{rg}(\widetilde{E}_{i,j}) = \mathrm{rg}(\widehat{E}_{i,j}) = k$ e quindi $\widetilde{E}_{i,j}, \widehat{E}_{i,j} \in A_k \setminus A_{k-1}$. Dunque $E_{i,j} = \widetilde{E}_{i,j} - \widehat{E}_{i,j} \in \mathrm{span}(A_k \setminus A_{k-1})$.