

Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

Esercizi - Foglio 5

Gruppo 1.

Esercizi del Capitolo 4 e 5 del libro di esercizi.

Gruppo 2.

Sia \mathbb{K} un campo.

Esercizio 1.

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione n e sia $f : V \rightarrow V$ un'applicazione \mathbb{K} -lineare. Dimostrare che f è nilpotente se e solo se $\dim(\ker(f^k)) \geq k$ per ogni $1 \leq k \leq n$.

Esercizio 2.

Siano $f, g : V \rightarrow W$ omomorfismi di spazi vettoriali su \mathbb{K} . Dimostrare che

$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leq \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

Esercizio 3.

Sia $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici $n \times n$ antisimmetriche a coefficienti in \mathbb{K} .

- (a) Dimostrare che $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.
- (b) Calcolare $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$ e trovarne una base.
- (c) Fissata una $X \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, dimostrare che

$$\begin{array}{ccc} C_X : \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & AX - XA \end{array}$$

è ben definito e \mathbb{K} -lineare.

- (d) Sia $X \in \mathcal{A}_3(\mathbb{K})$. Dimostrare che $X = 0$ oppure $\text{rg}(X) = 2$.
- (e) Per ogni $X \in \mathcal{A}_3(\mathbb{K})$, calcolare il nucleo di $C_X : \mathcal{A}_3(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{A}_3(\mathbb{K})$.
(Suggerimento: fare il calcolo nel caso per una $X = X_0$ semplice e poi tentare di ridurre il caso generale al caso X_0 .)

Esercizio 4.

Sia $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e sia M^T la sua trasposta. Usando l'algoritmo di Gauss, dimostrare che $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^T)$.

Esercizio 5.

Siano $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Definiamo $M_1 \sim M_2$ se e solo se $\exists P \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{K})$ e $\exists Q \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ entrambe invertibili tali che $PM_1Q = M_2$.

- (a) Dimostrare che \sim è una relazione di equivalenza su $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.
- (b) Dimostrare che $M_1 \sim M_2$ se e solo se $\text{rg}(M_1) = \text{rg}(M_2)$. *(Un possibile suggerimento: interpretare P come "fare operazioni sulle righe" e Q come "fare operazioni sulle colonne" e usare l'algoritmo di Gauss. Altre soluzioni, anche concettualmente più profonde, sono possibili!)*