Corso di geometria (per fisici)

Anno accademico 2009/2010

Esercizi - Foglio 5 - Soluzioni

Gruppo 2.

Esercizio 1.

Chiaramente, se $\dim(\ker(f^k)) \geq k$ per ogni $1 \leq k \leq n$ allora $f^n = 0$ e quindi f è nilpotente.

Viceversa, se $\dim(\ker(f^k)) \leq k-1$ per un qualche k fra 1 e n, allora $\exists j$ fra 0 e $k-1$ tale che $\dim(\ker(f^j)) = \dim(\ker(f^{j+1}))$. Poiché $\ker(f^j) \supseteq \ker(f^{j+1})$ e $\mathrm{Im}(f^j) \subseteq \mathrm{Im}(f^{j+1})$, si ha $\ker(f^j) = \ker(f^{j+1}) \neq V$ e $W := \mathrm{Im}(f^j) = \mathrm{Im}(f^{j+1}) \neq \{0\}$. Quindi $f(W) = W$ e $W \cap \ker(f) = \{0\}$. Ne segue che, per ogni $0 \neq w \in W$, $f^m(w) \neq 0$ per ogni $m \geq 0$, e quindi f non è nilpotente.

Esercizio 2.

Sia $w \in \mathrm{Im}(f+g)$. Allora $w = (f+g)(v) = f(v)+g(v)$ per un opportuno $v \in V$, e quindi $w \in f(V) + g(V)$, ossia $\mathrm{Im}(f+g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Ne segue che $rg(f+g) = \dim(\mathrm{Im}(f+g)) \leq \dim(\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)) \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{rg}(f) + rg(g)$, il che dimostra la disuguaglianza a destra.

Per quella a sinistra, sia $h = f+g$ e $k = -g$. Applicando la disuguaglianza precedente, otteniamo $\mathrm{rg}(h+k) \leq \mathrm{rg}(h)+\mathrm{rg}(k)$. Poiché $\mathrm{Im}(k) = \mathrm{Im}(g)$, si ha $\mathrm{rg}(k) = \mathrm{rg}(g)$, e quindi la disuguaglianza diventa $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g) \leq \mathrm{rg}(f+g)$. Scambiando i ruoli di f e g, otteniamo anche $\mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(f) \leq \mathrm{rg}(f+g)$ e concludiamo che $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f+g)$.

Esercizio 3.

Sia $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici $n \times n$ antisimmetriche a coefficienti in $\mathbb{K}$.

(a) Siano $A, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Allora $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B)$. Inoltre, se $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha $(\lambda A)^T = \lambda A^T = -\lambda A$. Quindi $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(b) Sia $\{E_{ij} \,|\, 1 \leq i,j \leq n\}$ la base canonica di $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, in cui $E_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i$, dove δ_{jk} è la delta di Kronecker e $\{e_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Allora $\mathcal{B} = \{E_{ij} - E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ è una base di $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, e quindi $\dim_K(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = n(n-1)/2$.

(c) La buona definizione segue se $C_X(A)$ è antisimmetrica. In effetti, $C_X(A)^T = (AX - XA)^T = X^T A^T - A^T X^T = XA - AX = -(AX - XA)$, e quindi $C_X(A)$ è antisimmetrica. Inoltre, se $A, B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, si ha $C_X(A+B) = ((A+B)X - X(A+B)) = AX + BX - XA - XB = (AX - XA) + (BX - XB) = C_X(A) + C_X(B)$. Infine, se $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha $C_X(\lambda A) = ((\lambda A)X - X(\lambda A)) = \lambda AX - \lambda XA = \lambda C_X(A)$. Quindi C_X è $\mathbb{K}$-lineare.

(d) Sia

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{K}$. Osserviamo che $X(ce_1 - be_2 + ae_3) = 0$, quindi $\operatorname{rg}(X) \leq 2$. Se fosse $\operatorname{rg}(X) \leq 1$, tutte le colonne sarebbero proporzionali. Poiché la diagonale maggiore è nulla, allora tutte le colonne devono essere nulle e quindi $X = 0$. Concludiamo che $X = 0$ oppure $\operatorname{rg}(X) = 2$.

(e) Se $X = 0$, chiaramente $\ker(X) = \mathbb{K}^3$. Altrimenti, se $\operatorname{rg}(X) = 2$, allora $\dim(\ker(X)) = 1$ ed un generatore di $\ker(X)$ è $ce_1 - be_2 + ae_3$, come calcolato al punto precedente.

Esercizio 4.

Le operazioni sulle righe fissano il nucleo, quindi non cambiano le dimensione di nucleo e immagine. Le operazioni sulle colonne fissano l'immagine, quindi non cambiano le dimensioni di nucleo e immagine. In conclusione, per determinare il rango di M possiamo usare liberamente operazioni elementari sulle righe e sulle colonne di M. Abbiamo visto in classe che, con operazioni sulle righe e sulle colonne, possiamo ridurre M alla forma

$$\left(\begin{array}{c|c} I_{r\times r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

dove $r = \operatorname{rg}(M)$. Questo vuol dire che, con operazioni su colonne e righe, anche M^T si può ridurre alla stessa forma. Dunque $\operatorname{rg}(M^T) = r = \operatorname{rg}(M)$.

Esercizio 5.

Siano $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Definiamo $M_1 \sim M_2$ se e solo se $\exists P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ e $\exists Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ entrambe invertibili tali che $PM_1Q = M_2$.

(a) $\sim$ è riflessiva, infatti per ogni $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ si ha $M = I_m M I_m$ e $I_m = I_m^{-1}$ è invertibile $\implies M \sim M$.
$\sim$ è simmetrica: infatti, se $M_1 \sim M_2$, allora esistono $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^m)$ e $Q \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^m)$ tali che $PM_1Q = M_2$. Quindi $P^{-1}M_2Q^{-1} = M_1$, ossia $M_2 \sim M_1$. Infine, $\sim$ è transitiva: se $M_1 \sim M_2$ e $M_2 \sim M_3$, allora esistono $P, R \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^m)$ e $Q, S \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ tali che $PM_1Q = M_2$ e $RM_2S = M_3$. Ne segue $(RP)M_1(QS) = M_3$, con $RP \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^m)$ e $QS \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$, quindi $M_1 \sim M_3$.

(b) L'osservazione cruciale è che $M_1 \sim M_2$ se e solo se, operando sulle righe e sulle colonne di M_1, riusciamo ad ottenere M_2. In effetti, abbiamo visto che, M_1 è equivalente a

$$\left(\begin{array}{c|c} I_{r_1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

dove $r_1 = \mathrm{rg}(M_1)$. Quindi, $\mathrm{rg}(M_1) = \mathrm{rg}(M_2) \implies M_1 \sim M_2$. D'altra parte, poiché le operazioni su righe e colonne non cambiano il rango, se $M_1 \sim M_2$, allora $\mathrm{rg}(M_1) = \mathrm{rg}(M_2)$.