Corso di geometria (per fisici)

Anno accademico 2009/2010

Esercizi - Foglio 4

Gruppo 1. (Soprattutto matrici.)

Esercizio 5.16-6.1-6.2-6.3-6.5-7.17-7.18-7.19-(7.25)-7.26-7.29-7.31-7.32- 11.15 del libro di esercizi. Calcolare inoltre le inverse (quando esistono delle matrici nell'esercizio 11.14.

(Per l'esercizio 7.18, usare matrici B opportune molto semplici e vedere quali informazioni produce la relazione $AB = BA$.
Per l'esercizio 7.26, usare l'algoritmo di Gauss e dimostrare che la condizione

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} |a_{ij}|$$

implica che i pivot sono tutti non nulli.)

Gruppo 2.

Sia $\mathbb{K}$ un campo.

Def. Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dice **triangolare superiore** se $A_{ij} = 0$ per ogni $1 \le i < j \le n$; **strettamente triangolare superiore** se $A_{ij} = 0$ per ogni $1 \le i \le j \le n$.

Def. Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dice **nilpotente** se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $A^k = 0$.

Esercizio 1.

Dimostrare che, se M, N sono triangolari superiori e $l \in \mathbb{K}$, allora $M + N$ e lM sono triangolari superiori. Dimostrare che, se M, N sono strettamente triangolari superiori e $l \in \mathbb{K}$, allora $M+N$ e lM sono strettamente triangolari superiori.

Esercizio 2.

Dimostrare che, se $M, N \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ sono triangolari superiori, allora NM è triangolare superiore. Dimostrare inoltre che, se M è triangolare superiore e N è strettamente triangolare superiore, allora MN e NM sono strettamente triangolari superiori.

Esercizio 3.

Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ triangolare superiore. Dimostrare che i seguenti fatti sono equivalenti:

(a) $M^n = 0$

(b) M è nilpotente

(c) M è strettamente triangolare superiore.

(Dimostrare che (a) $\Longrightarrow$ *(b)* $\Longrightarrow$ *(c)* $\Longrightarrow$ *(a).)*

Esercizio 4.

Siano $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dimostrare che $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB) = \mathrm{Tr}(BCA)$ ma che può aversi $\mathrm{Tr}(ABC) \neq \mathrm{Tr}(ACB)$.

Esercizio 5.

Siano $U, L \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, con U strettamente triangolare superiore e L strettamente triangolare inferiore.
È vero che, se $UL = LU$, allora $U = L = 0$?