

Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

Esercizi - Foglio 4 - Soluzioni

Gruppo 2.

Esercizio 1.

M è triangolare superiore (risp. strettamente triangolare superiore) se $M_{ij} = 0$ per ogni $j < i$ (risp. $j \leq i$).

Poiché $(M + N)_{ij} = M_{ij} + N_{ij}$, ne segue che M, N triangolari superiori $\implies M + N$ triangolare superiore. Poiché $(\lambda M)_{ij} = \lambda M_{ij}$, ne segue che M triangolare superiore $\implies \lambda M$ triangolare superiore.

Simile il caso delle strettamente triangolari superiori.

Esercizio 2.

Notiamo che $N_{ik}M_{kj}$ può essere non nullo solo se $i \leq k \leq j$, perché N e M sono triangolari superiori. Poiché $(NM)_{ij} = \sum_k N_{ik}M_{kj}$, ne segue che $(NM)_{ij}$ può essere non nullo solo se $j \geq i$, ovvero $(NM)_{ij} = 0$ se $j < i$, e quindi NM è triangolare superiore.

Se N è strettamente triangolare superiore, allora $N_{ik}M_{kj}$ può essere non nullo solo se $i < k \leq j$. Poiché $(NM)_{ij} = \sum_k N_{ik}M_{kj}$, ne segue che $(NM)_{ij}$ può essere non nullo solo se $j > i$, ovvero $(NM)_{ij} = 0$ se $j \leq i$, e quindi NM è strettamente triangolare superiore.

Il calcolo per MN è analogo.

Esercizio 3.

(a) \implies (b) Ovvio.

(b) \implies (c) Dato che M è triangolare, $(M^k)_{ii} = (M_{ii})^k$ (controllare). Poiché $M^k = 0$ per qualche k , allora $M_{ii} = 0$ per ogni i , e quindi M è strettamente triangolare.

(c) \implies (a) Definiamo la seguente catena di sottospazi

$$\mathbb{K}^n = V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n \supset V_{n+1} = \{0\}$$

come $V_i = \text{span}(v_1, \dots, v_{n-i+1})$ e $V_j = \{0\}$ se $j > n$. Ora, poiché M è strettamente triangolare superiore, $Me_j \in \text{span}(e_1, \dots, e_{j-1})$ e quindi $M(V_i) \subseteq V_{i+1}$. Dunque $M^k(V_i) \subseteq V_{k+i}$. In particolare, $M^n(\mathbb{K}^n) = M^n(V_1) \subseteq V_{n+1} = \{0\}$, ossia $M^n = 0$.

Esercizio 4.

Se $X, Y \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, abbiamo visto che $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$. Prendendo $X = AB$ e $Y = C$ si ottiene $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$. Prendendo $X = A$ e $Y = BC$ si ottiene $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA)$.

Se invece consideriamo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ACB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $\text{Tr}(ABC) = 1 \neq 0 = \text{Tr}(ACB)$.

Esercizio 5.

È falso. Per esempio,

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soddisfano $UL = LU$ ma $U \neq 0$ e $L \neq 0$.