Corso di geometria (per fisici)

Anno accademico 2009/2010

Esercizi - Foglio 2 - Soluzioni

Gruppo 1.
Esercizi da 2.1 a 2.11 del libro di esercizi. Soluzioni dal libro.

Gruppo 2.

1. Sia $\vec{v} \in \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Allora $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$ per opportuni $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Poiché $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + (a_2 - ka_3)\vec{v}_2 + a_3(\vec{v}_3 + k\vec{v}_2)$, si ha che $\vec{v} \in \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 + k\vec{v}_2)$. Viceversa, se $\vec{w} \in \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 + k\vec{v}_2)$, allora esistono $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{w} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + b_3(\vec{v}_3 + k\vec{v}_2)$. Quindi $\vec{w} = b_1\vec{v}_1 + (b_2 + kb_3)\vec{v}_2 + b_3\vec{v}_3$, ossia $\vec{w} \in \operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. E questo dimostra la prima asserzione.

   In modo simile, se $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$ con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R}^*$, allora $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + (h^{-1}a_2)(h\vec{v}_2) + a_3\vec{v}_3$. Viceversa, se $\vec{w} = b_1\vec{v}_1 + b_2(h\vec{v}_2) + b_3\vec{v}_3$ con $b_1, b_2, b_2 \in \mathbb{R}$, allora $\vec{w} = b_1\vec{v}_1 + (b_2h)\vec{v}_2 + b_3\vec{v}_3$. E questo dimostra che $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \operatorname{span}(\vec{v}_1, h\vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

2. $$V_c = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + (3-c)y - z = 1 - 2c \right\}$$

   Affinché V_c sia un sottospazio vettoriale, V_c deve contenere il vettore nullo $\vec{0}$, e quindi dobbiamo avere $c = 1/2$. In questo caso,

   $$V_{1/2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + 5y/2 - z = 0 \right\}$$

   Se $\vec{v} \in V_{1/2}$, allora $-\vec{v} \in V_{1/2}$ e $\lambda\vec{v} \in V_{1/2}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ chiaramente. Inoltre, se è facile verificare che, se $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in V_{1/2}$ (ovvero,

$2x_1+5y_1/2+z_1=0$) e $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in V_{1/2}$ (ovvero, $2x_2+5y_2/2+z_2 = 0$), allora $2(x_1+x_2)+5(y_1+y_2)/2+(z_1+z_2) = 0$, ossia $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} \in V_{1/2}$. Quindi V_c è un sottospazio vettoriale se e solo se $c = 1/2$.

3. Se $V_1 = V_2 \subset \mathbb{R}^3$, allora chiamiamo $V := V_1 = V_2$. Siano $P_1, P_2 \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ tali che $\Pi_1 = P_1 + V$ e $\Pi_2 = P_2 + V$ (dove $P_1 + V = \{Q \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \,|\, \exists \vec{v} \in V : Q = P_i + \vec{v}\}$).

   Affermiamo che per ogni $Q_1 \in \Pi_1$ si ha $\Pi_1 = Q_1 + V$. Infatti, $Q_1 \in \Pi_1 = P_1 + V$ e quindi esiste $\vec{v} \in V$ tale che $Q_1 = P_1 + \vec{v}$. Ora, se $R \in \Pi_1 = P_1 + V$, allora $R = P_1 + \vec{w}$ per un opportuno $\vec{w} \in V$ e quindi $R = (Q - \vec{v}_1) + \vec{w} = Q + (\vec{w} - \vec{v}_1) \in Q + V$. Viceversa, se $S \in Q_1 + V$, allora esiste $\vec{u} \in V$ tale che $S = Q_1 + \vec{u} = (P_1 + \vec{v}) + \vec{u} = P_1 + (\vec{v} + \vec{u}) \in P_i + V = \Pi_1$.

   In modo simile, per ogni $Q_2 \in \Pi_2$, si ha $\Pi_2 = Q_2 + V$.

   I due piani Π_1, Π_2 sono o paralleli oppure $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$. Ora, se $Q \in \Pi_1 \cap \Pi_2$, allora $\Pi_1 = Q + V = \Pi_2$, ossia i due piani coincidono.

4. Per esempio, sia
$$X = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\}$$
   X soddisfa le ipotesi, ma $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in X$, mentre $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \notin X$. Quindi X non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

5. In effetti, l'enunciato è falso. Per esempio, il polinomio $p(u,v) = (u^2+1)v^3$ definisce $Z = \{v = 0\}$, che è un sottospazio vettoriale.

   In effetti, la soluzione è più sottile (ma non è richiesta).

6. Se $\vec{v}, \vec{w}$ sono proporzionali e non nulli, vuol dire che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{w} = \lambda\vec{v}$. Allora gli unici vettori del tipo $a\vec{v} + b\vec{w} = (a + b\lambda)\vec{v}$ sono pure proporzionali a $\vec{v}$. Se $\vec{v}'$ è ottenuto da $\vec{v}$ per rotazione (in senso anti-orario) di $\pi/2$, allora $\vec{v}'$ non è allineato a $\vec{v}$ e quindi non è proporzionale a $\vec{v}$. Dunque, $\vec{v}'$ non si può scrivere come $a\vec{v} + b\vec{w}$.

Viceversa, se

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

non sono proporzionali, allora almeno uno dei due numeri v_1, w_1 non è nullo. Supponiamo $v_1 \neq 0$ (il caso $w_1 \neq 0$ è simile). Allora definiamo $\vec{u}$ come

$$\vec{u} := \vec{w} - \frac{w_1}{v_1}\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

dove $u_2 = w_2 - \frac{w_1}{v_1}\vec{v_2}$. Quindi (per un esercizio precedente) $\mathrm{span}(\vec{v}, \vec{w}) = \mathrm{span}(\vec{v}, \vec{u})$.

Poiché $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono proporzionali, $u_2 \neq 0$, e $\vec{u} = u_2\vec{e}_2$. Ne segue che $\mathrm{span}(\vec{v}, \vec{u}) = \mathrm{span}(\vec{v}, \vec{e}_2) = \mathrm{span}(\vec{v} - v_2\vec{e}_2, \vec{e}_2) = \mathrm{span}(v_1\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \mathrm{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \mathbb{R}^2$. Ossia ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ si scrive come $a\vec{v} + b\vec{w}$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$, e quindi $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

7. Poiché P_1, P_2, P_3 non sono allineati, i vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ non sono proporzionali. Per l'esercizio precedente, il vettore $\overrightarrow{P_1Q} = a\overrightarrow{P_1P_2} + b\overrightarrow{P_1P_3}$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$. Quindi, $Q - P_1 = a(P_2 - P_1) + b(P_3 - P_1)$, ovvero $Q = (1-a-b)P_1 + aP_2 + bP_3$, cioè $\vec{OQ} = a_1\vec{OP}_1 + a_2\vec{OP}_2 + a_3\vec{OP}_3$ con $a_1 = 1 - a - b$, $a_2 = a$ e $a_3 = b$. Per costruzione, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$.

8. Nel caso del piano $\Pi := \mathrm{span}(\vec{u}, \vec{v})$, cerchiamo una tripla non nulla di numeri reali (a, b, c) tale che l'equazione $ax + by + cz = 0$ sia soddisfatta da $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (e quindi sarà soddisfatta da tutti i vettori in $\mathrm{span}(\vec{u}, \vec{v})$, e quindi sarà l'equazione del piano). Per imporre $\vec{u} \in \Pi$ abbiamo $2a - b + c = 0$. Per imporre $\vec{v} \in \Pi$ abbiamo $-a + b - 2c = 0$. Cerchiamo di risolvere quindi il sistema

$$\begin{cases} 2a - b + c = 0 \\ -a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

Sommando le equazioni otteniamo $a - c = 0$, ossia $a = c$. Dalla prima equazione otteniamo $0 = 2a - b + c = 2a - b + a = a - b$ e quindi $a = b = c$. Dunque, un'equazione del piano Π è $x + y + z = 0$ (le altre sono del tipo $ax + ay + az = 0$, dove a è un qualunque numero reale non nullo).

Negli altri casi, con un argomento analogo otteniamo $\mathrm{span}(\vec{v}, \vec{w}) = \{x - y - z = 0\}$ e $\mathrm{span}(\vec{u}, \vec{w}) = \{x - y - 3z = 0\}$.

9. Prima di tutto vogliamo trovare un vettore non nullo v_2 contenuto in $\Pi_1 \cap \Pi_2$. Per fare questo dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

e le soluzioni sono proporzionali a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Quindi possiamo scegliere $\vec{v}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

Come $\vec{v}_1$ possiamo prendere un qualunque vettore di Π_1 non proporzionale a $\vec{v}_2$, per esempio $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. In modo simile, possiamo scegliere $\vec{v}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, che è in Π_2 ma non è proporzionale a $\vec{v}_2$.

Gruppo 3.

Esercizi 3.19-3.20-3.21-3.22-3.23 dal libro degli esercizi. Soluzioni dal libro.

Gruppo 4.

1. $mcd(p(t), q(t)) = 5$, $mcd(p(t), s(t)) = t(t^2 + 1)$, $mcd(q(t), s(t)) = 1$.

   Dividendo $p(t)$ per $q(t)$ otteniamo $p(t) = (t^3 + t - 5)q(t) + (-15t^2 + 10)$. Dividendo $q(t)$ per il resto $-15t^2 + 10$ otteniamo $q(t) = (-15t^2 + 10)(-2t/30 + 1/5) + 5t/3$, e finalmente $15t^2 + 10 = (5t/3)(9t) + 10$, quindi $mcd(p(t), q(t)) = 10$ (che è invertibile in $\mathbb{Q}[t]$), ossia $p(t)$ e $q(t)$ non hanno fattori comuni.

   Dividendo $p(t)$ per $s(t)$ otteniamo $p(t) = s(t)(t-1)+(-t^4-3t^3-t^2-3t)$. Al passo sequente, $s(t) = (-t^4 - 3t^3 - t^2 - 3t)(-t + 5) + (15t^3 + 15t)$. Poi $(-t^4 - 3t^3 - t^2 - 3t) = (15t^3 + 15t)(-2t/30 - 1/5)$, e quindi $mcd(p(t), s(t)) = (15t^3 + 15t) = 15t(t^2 + 1)$.

2. Siano $\alpha_k = \exp(\pi/6 + k\pi/3)$ per $k = 0, \ldots, 5$ le radici seste di -1. Allora $\sqrt[6]{2}\alpha_0, \ldots, \sqrt[6]{2}\alpha_5$ sono le radici complesse di $p(t)$, quindi

$$p(t) = (t - \sqrt[6]{2}\alpha_0) \cdots (t - \sqrt[6]{2}\alpha_5)$$

   è la fattorizzazione di $p(t)$ in irriducibili su $\mathbb{C}$.

Si può vedere facilmente che $\bar{\alpha}_k = \alpha_{5-k}$ e nessun α_k è reale. Quindi $(t - \sqrt[6]{2}\alpha_k)(t - \sqrt[6]{2}\alpha_{5-k}) = t^2 - 2\sqrt[6]{2}\cos(\pi/6 + k\pi/3) + \sqrt[3]{2}$ è un fattore irriducibile su $\mathbb{R}$ di $p(t)$. Dunque

$$p(t) = (t^2 - \sqrt[3]{2})(t^2 - \sqrt[6]{2}\sqrt{3}t + \sqrt[3]{2})(t^2 + \sqrt[6]{2}\sqrt{3}t + \sqrt[3]{2})$$

è la fattorizzazione di $p(t)$ in irriducibili su $\mathbb{R}$. Chiamiamo $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ i tre fattori irriducibili su $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda la fattorizzazione su $\mathbb{Q}[t]$, supponiamo che $p(t) = p_1(t)p_2(t)$ con $p_1(t), p_2(t) \in \mathbb{Q}[t]$ entrambi di grado almeno uno. Possiamo supporre che $\deg(p_1) \leq \deg(p_2)$.

Asseriamo che p_1 è un q_i (a meno di coefficienti in $\mathbb{R}$). In effetti, fattorizzando p_1 e p_2 su $\mathbb{R}$ e facendo il prodotto dobbiamo ritrovare la fattorizzazione di p. Per unicità della fattorizzazione, p_1 coincide con un q_i a meno di fattori moltiplicativi invertibili in $\mathbb{R}$, ossia $p_1(t) = \lambda q_i(t)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}^*$ e per un $i \in \{1, 2\}$. Tuttavia, $p_1(t) \in \mathbb{Q}[t]$ e questo produce un assurdo, visto che (è facile verificarlo) non esiste alcun $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda q_i(t) \in \mathbb{Q}[t]$ per qualche i.

Dunque $p(t)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[t]$.

3. Possiamo scrivere $1 + i$ in notazione esponenziale: il suo modulo è $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e il suo argomento è $\arctan(1/1) = \pi/4$. Quindi stiamo risolvendo

$$e^z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

Scrivendo $z = x + iy$ e uguagliando i moduli si ottiene $e^x = |e^z| = |1 + i| = |\sqrt{2}e^{i\pi/4}| = \sqrt{2}$, quindi $x = \log\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log 2$.

Dividendo entrambi i membri dell'equazione per $\log\sqrt{2}$, otteniamo

$$e^{iy} = e^{i\pi/4}$$

e questo si verifica se e solo se $y = \pi/4 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Dunque le soluzioni dell'equazione sono

$$\{z = \log\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

4. Per questo esercizio serve un disegno: venire a ricevimento!

5. Sia $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d$ con $a_k \in \mathbb{C}$ e $d \geq 0$. Se p non è il polinomio nullo, possiamo supporre $a_d \neq 0$. Scriviamo

$$p(t) = t^d \left(a_d + \frac{a_{d-1}}{t} + \frac{a_{d-2}}{t^2} + \cdots + \frac{a_0}{t^d} \right)$$

Quando $|t|$ è molto grande, la quantità fra parentesi sarà molto vicina a a_d, quindi in particolare il suo modulo sarà piú grande di $|a_d/2| > 0$. Quindi $|p(t)| \geq |a_d/2||t|^d$ per $|t|$ grande. Affinché $|p(t)| < M$ per ogni $t \in \mathbb{C}$, dobbiamo quindi avere $d = 0$, ossia il polinomio deve essere costante.

In modo simile, sia β una soluzione complessa dell'equazione $z^d = a_d$. Possiamo scrivere

$$p(t) = (\beta t)^d \left(1 + \frac{a_{d-1}}{a_d t} + \frac{a_{d-2}}{a_d t^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_d t^d} \right) = (\beta t^d) f(t)$$

Per $|t|$ grande, la quantità $f(t)$ in parentesi sarà molto vicina ad 1 e quindi $\mathrm{Re}(f(t)) > \frac{1}{2}$ per $|t|$ grande. Dunque, per $x \in \mathbb{R}$ abbiamo $\mathrm{Re}(p(\beta^{-1}x)) = \mathrm{Re}(x^d f(t)) = x^d \mathrm{Re}(f(t)) \geq x^d/2$ per $|x|$ grande. Affinché $\mathrm{Re}(p(t)) < M$ per ogni $t \in \mathbb{C}$ (e quindi anche per $t = \beta x$ con $x \in \mathbb{R}$) è che $d = 0$. Dunque $p(t)$ è una costante.

Gruppo 5.

1.
$$s_C(P) = \begin{pmatrix} 2c_1 - p_1 \\ \vdots \\ 2c_n - p_n \end{pmatrix}$$

2.
$$h_{C,\lambda}(P) = \begin{pmatrix} (1-\lambda)c_1 + \lambda p_1 \\ \vdots \\ (1-\lambda)c_n + \lambda p_n \end{pmatrix}$$

3.
$$(t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}})(P) = t_{\vec{v}}(P + \vec{w}) = P + \vec{v} + \vec{w} = t_{\vec{v}+\vec{w}}(P)$$

e quindi, per simmetria, è uguale a $(t_{\vec{w}} \circ t_{\vec{v}})(P)$.

4.

$$(s_C \circ s_D)(P) = s_c(D - \overrightarrow{DP}) = C - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DP} = 2C - 2D + P = P + 2\overrightarrow{DC} = t_{2\overrightarrow{DC}}(P)$$

5.

$$(s_C \circ t_{\vec{v}})(P) = s_C(P + \vec{v}) = C - \overrightarrow{CP} - \vec{v} = 2C - P - \vec{v} = 2(C - \frac{1}{2}\vec{v}) - P = s_{C - \frac{1}{2}\vec{v}}(P)$$

Inoltre,

$$(t_{\vec{v}} \circ s_C)(P) = t_{\vec{v}}(C - \vec{CP}) = C - \vec{CP} + \vec{v} = 2C - P + \vec{v} = 2(C + \frac{1}{2}\vec{v}) - P = s_{C + \frac{1}{2}\vec{v}}(P)$$

Da quanto scritto sopra si deduce che $s_C \circ t_{\vec{v}} = t_{-\vec{v}} \circ s_C$.

6.

$$(t_{\overrightarrow{CD}} \circ h_{C,\lambda} \circ t_{-\overrightarrow{CD}})(P) = (t_{\overrightarrow{CD}} \circ h_{C,\lambda})(P - \overrightarrow{CD}) = t_{\overrightarrow{CD}}(C + \lambda\overrightarrow{CP} - \lambda\overrightarrow{CD}) =$$

$$= C + \lambda\overrightarrow{CP} + (1 - \lambda)\overrightarrow{CD} = D + \lambda\overrightarrow{DP} = h_{D,\lambda}(P)$$

Quindi $t_{\overrightarrow{CD}} \circ h_{C,\lambda} = h_{D,\lambda} \circ t_{\overrightarrow{CD}}$.

7. Dal punto precedente si deduce che, se $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, allora $t_{\vec{v}} \circ h_{C,\lambda} = h_{C,\lambda} \circ t_{\vec{v}}$ se e solo se $C = D$ (ovvero $\vec{v} = \vec{0}$) oppure $\lambda = 1$.

8.

$$(h_{C,\lambda} \circ h_{D,\mu})(P) = h_{C,\lambda}(D + \mu\overrightarrow{DP}) = C + \lambda\overrightarrow{CD} + \lambda\mu\overrightarrow{DP}$$

$$(h_{D,\mu} \circ h_{C,\lambda})(P) = h_{D,\mu}(C + \lambda\overrightarrow{CP}) = D + \mu\overrightarrow{DC} + \mu\lambda\overrightarrow{CP}$$

La differenza è

$$C + \lambda\overrightarrow{CD} + \lambda\mu\overrightarrow{DP} - D - \mu\overrightarrow{DC} - \mu\lambda\overrightarrow{CP} = (-1 + \lambda + \mu - \mu\lambda)\overrightarrow{CD} = -(1 - \lambda)(1 - \mu)\overrightarrow{CD}$$

Affinché quest'ultimo sia il vettore nullo è necessario che $C = D$ oppure $\lambda = 1$ oppure $\mu = 1$.

Appendice gruppo 5.

- $\mathrm{Trasl}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}, \circ)$ è un gruppo abeliano. Infatti, se chiamiamo $t_{\vec{v}}$ la traslazione di vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, allora $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} = t_{\vec{v}+\vec{w}}$; $t_{\vec{0}} = id_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}}$ è l'elemento neutro, la composizione è associativa e commutativa e $t_{-\vec{v}}$ è l'inverso di $t_{\vec{v}}$.

- $(\mathrm{Om}_C(\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}), \circ)$ un gruppo abeliano. Infatti, se chiamiamo $h_{C,\lambda}$ l'omotetia di centro C e fattore $\lambda \in \mathbb{R}^*$, allora $h_{C,\lambda} \circ h_{C,\mu} = h_{C,\mu\lambda} = h_{C,\mu} \circ h_{C\,l}$. L'elemento neutro è $h_{C,1} = id_{\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}}$. La composizione è associativa e commutativa e l'inverso di $h_{C,\lambda}$ è $h_{C,1/\lambda}$.

- G è un gruppo ma non è abeliano. In effetti, abbiamo visto negli esercizi precedenti che la composizione di una traslazione con un'omotetia è un'omotetia (eventualmente con un altro centro), la composizione di due traslazioni è una traslazione e la composizione di due omotetia è una traslazione oppure un'omotetia. L'elemento neutro è sempre l'identità. La composizione è come sempre associativa. Inoltre tutti gli elementi hanno un inverso (come visto prima).

  Per verificare che G non è abeliano, dobbiamo trovare due elementi del gruppo che non commutano. Per esempio, dagli esercizi precedenti, $t_{\vec{v}} \circ h_{C,\lambda} = h_{C,\lambda} \circ t_{\vec{v}}$ se e solo se $\vec{v} = \vec{0}$ oppure $\lambda = 1$. Prendendo un $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\lambda \neq 1$, otteniamo due elementi che non commutano.

Esercizio 6.

Sia ABC un triangolo nel piano affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e siano a, b, c i punti medi dei segmenti BC, CA, AB. Si scelga un punto P qualsiasi e si definisca

$$G := P + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$$

1. Prendiamo un altro punto Q e definiamo $G' := Q + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$. Vogliamo dimostrare che $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$ e quindi $G = G'$.

   $$\overrightarrow{GG'} = Q - P + \frac{1}{3}(\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{PC}) = Q - P + \frac{1}{3}(3\overrightarrow{PQ}) = \vec{0}$$

2. Scegliamo $P = A$ e calcoliamo

   $$G = A + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = A + \frac{1}{3}(\overrightarrow{Aa} + \overrightarrow{aB} + \overrightarrow{Aa} + \overrightarrow{aC}) = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{Aa}$$

   perché $\overrightarrow{aB} + \overrightarrow{aC} = \vec{0}$. Gli altri due casi sono analoghi.

3. I punti della mediana $\frown Aa$ si scrivono come $A + t\overrightarrow{Aa}$ con $t \in [0,1]$. Quindi G è sulla mediana $\frown Aa$. Analogamente, G appartiene alla mediana $\frown Bb$ e alla mediana $\frown Cc$ e quindi le tre mediane si intersecano in G.

4. Il punto sarà soggetto alla forza ottenuta sommando i tre vettori. Quindi

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \frac{\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC}}{3} = \vec{0}$$

e quindi il punto è in equilibrio.