

Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

Esercizi - Foglio 13

Gruppo 1.

Esercizio 1.

Sia $V = \mathbb{R}^n$ e b un prodotto scalare definito positivo (chiamiamo d la funzione distanza associata a b). Sia $P \in V$ un punto (identificato canonicamente con il vettore $\overrightarrow{OP} = p_1e_1 + \dots + p_n e_n$) e sia $W \subset V$ un sottospazio affine del tipo $W = Q + W_0$, dove Q è un punto di W , $\overrightarrow{OQ} = q_1e_1 + \dots + q_n e_n$ e $W_0 \subset V$ è un sottospazio vettoriale con base ortonormale $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_k\}$

- Dimostrare che, se $\pi_{W_0} : V \rightarrow V$ è la proiezione ortogonale su W_0 (rispetto al prodotto scalare b), allora $\pi_{W_0}(P)$ è il punto di W_0 a distanza minima da P e che tale punto è unico. Determinare esplicitamente $\pi_{W_0}(P)$.
- Dimostrare che esiste un'unica applicazione affine $\pi_W : V \rightarrow V$ (detta *proiezione ortogonale su W*) tale che $\pi_W \circ \pi_W = \pi_W$, $\text{Im}(\pi_W) = W$ e $R - \pi_W(R)$ è un vettore ortogonale a W_0 per ogni $R \in V$. Determinare esplicitamente $\pi_W(P)$.

Esercizio 2.

Sia \mathbb{R}^3 munito del prodotto scalare standard. Siano $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$ due rette affini del tipo $L_1 = P_1 + U_1$ e $L_2 = P_2 + U_2$, dove $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$ sono punti e $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali unidimensionali. La *distanza* fra L_1 e L_2 è definita come

$$d(L_1, L_2) = \min\{d(Q_1, Q_2) \mid Q_1 \in L_1, Q_2 \in L_2\}$$

Dimostrare che, se $U_1 = U_2$ (ossia L_1 e L_2 sono *parallele*), allora $d(L_1, L_2) = d(P_1, L_2) = d(L_1, P_2) \leq d(P_1, P_2)$. Dimostrare che, se $U_1 \neq U_2$ (ossia L_1 e L_2 sono *incidenti* oppure *sghembe*), allora esistono e sono unici $Q_1 \in L_1$ e $Q_2 \in L_2$ tali che $d(L_1, L_2) = d(Q_1, Q_2)$ e inoltre il vettore $Q_1 - Q_2$ genera $(U_1 \cap U_2)^\perp$.

Gruppo 2.

- Esercizi 12.1-12.4-12.5-12.14-12.18-12.27-12.30-12.31-12.33
- esercizi 13.6-13.7-13.9-13.11-13.13 (vedere Definizione 13.9 per l'angolo fra due piani in \mathbb{R}^3 , Definizione 13.11 per l'angolo fra un piano e una retta in \mathbb{R}^3)
- esercizi misti 15.2-15.5-15.8-15.12(triangolate, se possibile, e poi usate Gram-Schmidt)

dal libro di testo.