Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

Esercizi - Foglio 13 - Soluzioni

Gruppo 1.

Esercizio 1.

(a) Sia $R \in W_0$ e sia $P' = \pi_{W_0}(P)$. Allora $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'R}$. Notiamo che $\overrightarrow{P'R} \in W_0$ e $\overrightarrow{PP'} \in W_0^\perp$, dunque $\overrightarrow{P'R} \perp \overrightarrow{PP'}$ e quindi $d(P, R) = \|\overrightarrow{PR}\|^2 = \|\overrightarrow{P'R}\|^2 + \|\overrightarrow{PP'}\|^2 = d(P', R) + d(P, P')$, che è dunque minima se e solo se $P' = R$.

Come visto in classe,

$$\pi_{W_0}(P) = \sum_{i=1}^{n} b(\overrightarrow{OP}, w_i)w_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_j\, b(e_j, w_i)w_i$$

(b) Per l'esistenza e l'unicità di π_W è sufficiente traslare tutta la configurazione in modo da mandare Q in O e poi usare la proiezione ortogonale per un sottospazio vettoriale.

Esplicitamente,

$$\pi_W(P) = Q + \pi_{W_0}(P - Q)\,.$$

Esercizio 2.

- Siano L_1, L_2 rette parallele in $\mathbb{R}^3$ con giacitura $U = U_1 = U_2 \subset \mathbb{R}^3$. Allora $L_1 = P_1 + U$ e $L_2 = P_2 + U$. Quindi

  $$d(L_1, L_2) = \min\{d(P_1 + u_1, P_2 + u_2) \,|\, u_1, u_2 \in U\}$$

  Poiché la traslazione (per esempio di vettore $u_1 \in U$) preserva le distanze,

  $$d(L_1, L_2) = \min\{d(P_1, P_2 + u) \,|\, u \in U\} = d(P_1, L_2) \leq d(P_1, P_2)$$

  Simmetricamente, abbiamo anche $d(L_1, L_2) = d(L_1, P_2)$.

- Se le due rette sono incidenti in Q, allora chiaramente $d(L_1, L_2) = 0 = d(Q_1, Q_2)$, dove $Q = Q_1 = Q_2$ e tale punto è chiaramente unico.

  Supponiamo ora L_1, L_2 sghembe. Sia $U_3 = (U_1 + U_2)^\perp$ e sia $W_0 = U_1 + U_3$. Il piano $W = P_1 + W_0$ contiene L_1 e interseca L_2 esattamente in un punto Q_2 (perché $\mathbb{R}^3 = W_0 \oplus U_2$). La retta $Q_2 + U_3$ è contenuta in W, ortogonale a L_1 e L_2 e quindi interseca L_1 in un unico punto Q_1.

  Poiché le due rette non sono incidenti, il vettore $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ (che appartiene a L_3) è non nullo, e dunque genera L_3.

Inoltre, come nell'esercizio precedente, se $R_1 \in L_1$ e $R_2 \in L_2$

$$d(R_1, R_2) = \sqrt{\|\overrightarrow{R_1Q_1}\|^2 + \|\overrightarrow{Q_1Q_2}\|^2 + \|\overrightarrow{Q_2R_2}\|^2} \geq \|\overrightarrow{Q_1Q_2}\|$$

perché $\overrightarrow{R_1Q_1} \in U_1$ e $\overrightarrow{R_2Q_2} \in U_2$ sono ortogonali a $\overrightarrow{Q_1Q_2} \in U_3$.
Dunque $d(L_1, L_2) = d(Q_1, Q_2)$ e tali Q_1, Q_2 sono chiaramente unici.