

# Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

## Esercizi - Foglio 11 - Soluzioni

### Gruppo 2.

#### Esercizio 1.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  di dimensione  $n$  e sia  $f : V \rightarrow V$  un'applicazione  $\mathbb{K}$ -lineare. Sia  $q(t) \in \mathbb{K}[t]$  un polinomio non nullo tale che  $q(f) = 0 \in \text{End}(V)$ . Dire nei seguenti casi se  $f$  è triangolabile o diagonalizzabile; individuare i possibili polinomi minimi e caratteristici e, in ciascun caso, trovare le dimensioni possibili degli autospazi e degli autospazi generalizzati, la traccia e il determinante.

Poiché  $q(t) \in \mathcal{I}(f)$ , il polinomio minimo  $p_{f,\min}(t)$  di  $f$  divide  $q(t)$ . Inoltre, il polinomio caratteristico  $p_f(t)$  di  $f$  è multiplo del polinomio minimo  $p_{f,\min}(t)$ , ha gli stessi fattori irriducibili di  $p_{f,\min}(t)$  e ha grado esattamente  $n$ .

*(Nei casi in cui il fattore  $(t^2 - 2t + 4)$  compare nel polinomio minimo e quindi nel polinomio caratteristico, abbiamo usato il fatto che  $\ker(f^2 - 2f + 4I)$  ha dimensione multipla di 2. Questo non l'abbiamo visto a lezione e non è richiesto, ma l'ho incluso per completezza.)*

(a)  $q(t) = t^2(t+2)(t^2 - 2t + 4)$  è la fattorizzazione in irriducibili.

- $p_{f,\min}(t) = t$  e quindi  $f = 0$  ( $f$  è diagonale) e  $p_f(t) = (-t)^5$ . L'unico autovalore è 0 e  $\tilde{E}_0 = E_0 = \ker(f) = V$ . Quindi  $\text{tr}(f) = 0$  e  $\det(f) = 0$ .
- $p_{f,\min}(t) = t^2$  e quindi  $p_f(t) = (-t)^5$ . L'unico autovalore è  $\lambda = 0$  e  $\tilde{E}_0 = V$ , mentre  $E_0(f) = \ker(f)$  può avere dimensione 1, 2, 3, 4. Dunque  $f$  è triangolabile ma non diagonalizzabile. Infine  $\det(f) = 0$  e  $\text{tr}(f) = 0$ .

- $p_{f,min}(t) = t + 2$  e quindi  $f = -2 \cdot Id$  ( $f$  è diagonale) e  $p_f(t) = (2 + t)^5$ . L'unico autovalore è  $-2$  e  $\tilde{E}_{-2} = E_{-2} = V$ . Inoltre  $\text{tr}(f) = 5(-2) = -10$  e  $\det(f) = (-2)^5 = -32$ .
- Se  $p_{f,min}(t) = t^2 - 2t + 4$ , allora  $p_f(t) = (t^2 - 2t + 4)^k$  non può mai avere grado 5. Dunque questo caso non capita.
- $p_{f,min}(t) = t(t + 2)$  e quindi  $f$  è diagonalizzabile con autovalori 0 e  $-2$ :  $V = E_0 \oplus E_{-2}$ .  $p_f(t) = (-t)^{m_0}(-2 - t)^{m_{-2}}$  con  $m_0 + m_{-2} = 5$  e  $m_0, m_{-2} \geq 1$ .  $m_0 = \dim(E_0)$  e  $m_{-2} = \dim(E_{-2})$ . Infine,  $\det(f) = 0$  e  $\text{tr}(f) = (-2)m_{-2} = (-2)\text{rg}(f)$ .
- $p_{f,min}(t) = t^2(t + 2)$  e quindi  $f$  è triangolabile ( $V = \tilde{E}_0 \oplus \tilde{E}_{-2}$ ) ma non diagonalizzabile, con autovalori 0 e  $-2$ . Inoltre,  $\tilde{E}_{-2} = E_{-2}$ , mentre  $\tilde{E}_0 \supsetneq E_0$ . Dunque  $m_{-2} = \dim(E_{-2}) \geq 1$  e  $1 \leq m_{geom,0} = \dim(E_0) < \dim(\tilde{E}_0) = m_{alg,0} = 5 - m_{-2}$ . Si ha  $p_f(t) = (-t)^{5-m_{-2}}(-2 - t)^{m_{-2}}$ . Infine  $\det(f) = 0$  e  $\text{tr}(f) = (-2)m_{-2}$ .
- $p_{f,min}(t) = t(t^2 - 2t + 4)$  e quindi  $f$  non è triangolabile e l'unico autovalore è 0. Si ha  $V = E_0 \oplus \ker(f^2 - 2f + 4I)$  (con  $\dim(E_0) = m_0$  e  $\dim(\ker(f^2 - 2f + 4I)) = 5 - m_0$ ) con le possibilità:  $m_0 = 1$  e quindi  $p_f(t) = (-t)(t^2 - 2t + 4)^2$ , oppure  $m_0 = 3$  e quindi  $p_f(t) = (-t)^3(t^2 - 2t + 4)$ . In entrambi i casi,  $\det(f) = 0$ . Tuttavia, se  $m_0 = 1$  si ha  $\text{tr}(f) = 4$ ; se  $m_0 = 3$  si ha  $\text{tr}(f) = 2$  (ricordiamo che  $\text{tr}(f)$  è  $(-1)^{n-1}$  il coefficiente di grado  $n - 1$  di  $p_f(t)$ , mentre  $\det(f)$  è il termine noto di  $p_f(t)$ ).
- $p_{f,min}(t) = t^2(t^2 - 2t + 4)$  e quindi  $f$  non è triangolabile e l'unico autovalore è 0. Si ha  $V = \tilde{E}_0 \oplus \ker(f^2 - 2f + 4I)$  con  $1 \leq \dim(E_0) = m_{0,geom} < m_{0,alg} = \dim(\tilde{E}_0)$  e  $\dim(\ker(f^2 - 2f + 4I)) = 5 - m_{0,alg}$ . Dunque  $m_{0,alg} = 3$  e  $m_{0,geom}$  può essere 1 oppure 2. Si ha  $p_f(t) = (-t)^3(t^2 - 2t + 4)$ ,  $\det(f) = 0$  e  $\text{tr}(f) = 2$ .
- $p_{f,min}(t) = (t + 2)(t^2 - 2t + 4)$  e quindi  $f$  non è triangolabile l'unico autovalore è  $-2$ . Si ha  $V = E_{-2} \oplus \ker(f^2 - 2f + 4I)$  (con  $\dim(E_{-2}) = m_{-2}$  e  $\dim(\ker(f^2 - 2f + 4I)) = 5 - m_{-2}$ ) con le possibilità:  $m_{-2} = 1$  e quindi  $p_f(t) = (-2 - t)(t^2 - 2t + 4)^2$ , oppure  $m_{-2} = 3$  e quindi  $p_f(t) = (-2 - t)^3(t^2 - 2t + 4)$ . Nel primo caso,  $\det(f) = -32$  e  $\text{tr}(f) = 2$ . Nel secondo caso,  $\det(f) = -32$  e  $\text{tr}(f) = -4$ .

- $p_{f,min}(t) = t(t+2)(t^2 - 2t + 4)$  e quindi  $f$  non è triangolabile e ha autovalori 0 e 2. Si ha  $V = E_0 \oplus E_{-2} \oplus \ker(f^2 - 2f + 4I)$ , con  $\dim(\ker(f^2 - 2f + 4I)) = 2$  e  $m_0, m_{-2} \geq 1$  e  $m_0 + m_{-2} = 3$ . Si hanno dunque due possibilità:  $m_0 = 1$  e  $m_{-2} = 2$  oppure  $m_0 = 2$  e  $m_{-2} = 1$ . Nel primo caso,  $p_f(t) = (-t)(-2-t)^2(t^2 - 2t + 4)$ ,  $\det(f) = 0$  e  $\text{tr}(f) = -2$ . Nel secondo caso,  $p_f(t) = (-t)^2(-2-t)(t^2 - 2t + 4)$ ,  $\det(f) = 0$  e  $\text{tr}(f) = 0$ .
- $p_{f,min}(t) = t^2(t+2)(t^2 - 2t + 4)$  e quindi  $f$  non è triangolabile e ha autovalori 0 e 2. Si ha  $V = \tilde{E}_0 \oplus E_{-2} \oplus \ker(f^2 - 2f + 4I)$ , con  $\dim(\ker(f^2 - 2f + 4I)) = 2$ ,  $m_{-2} = 1$ ,  $m_{0,geom} = 1$  e  $m_{0,alg} = 2$ . Dunque,  $p_f(t) = (-t)^2(-2-t)(t^2 - 2t + 4)$ ,  $\det(f) = 0$  e  $\text{tr}(f) = 0$ .

(b)  $q(t) = (t-1)^2(t+1)$  è la fattorizzazione in irriducibili.

- $p_{f,min}(t) = t-1$ ,  $f = Id$  ( $f$  è diagonale con unico autovalore 1,  $V = E_1$ ),  $p_f(t) = (1-t)^3$ ,  $\det(f) = 1$ ,  $\text{tr}(f) = 3$ .
- $p_{f,min}(t) = t+1$ ,  $f = -Id$  ( $f$  è diagonale con unico autovalore  $-1$ ,  $V = E_{-1}$ ),  $p_f(t) = (-1-t)^3$ ,  $\det(f) = -1$ ,  $\text{tr}(f) = -3$ .
- $p_{f,min}(t) = (t-1)(t+1)$ , quindi  $f$  è diagonalizzabile con autovalori 1 e  $-1$ , ossia  $V = E_1 \oplus E_{-1}$ , dove  $m_1 = \dim(E_1) \geq 1$  e  $m_{-1} = \dim(E_{-1}) \geq 1$  e  $m_1 + m_{-1} = 3$ . Dunque,  $p_f(t) = (1-t)^{m_1}(-1-t)^{m_{-1}}$ ,  $\det(f) = (-1)^{m_{-1}}$  e  $\text{tr}(f) = m_1 - m_{-1}$ .
- $p_{f,min}(t) = (t-1)^2(t+1)$ , quindi  $f$  è triangolabile ma non diagonalizzabile, con autovalori 1 e  $-1$ . Si ha  $V = \tilde{E}_1 \oplus E_{-1}$ , con  $m_{-1} = 1$  e  $m_{1,alg} = 2$  e  $m_{1,geom} = 1$ . Dunque  $p_f(t) = p_{f,min}(t)$ ,  $\det(f) = -1$  e  $\text{tr}(f) = 1$ .

(c) Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , il polinomio  $(t^2 + 1)$  è irriducibile, dunque dovremmo avere  $p_f(t) = (t^2 + 1)^k$  di grado 5, il che è impossibile. Quindi questo caso non si verifica.

Trattiamo ora  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Si ha  $q(t) = (t-i)^3(t+i)^3$ .

- $p_{f,min}(t) = t-i$ ,  $f = iI$  diagonale con unico autovalori  $i$ ,  $m_i = 5$  e  $p_f(t) = (i-t)^5$ ,  $\text{tr}(f) = 5i$  e  $\det(f) = i^5 = i$ .
- $p_{f,min}(t) = (t-i)^2$ ,  $f$  triangolabile ma non diagonalizzabile, con unico autovalore  $i$ . Si ha  $m_{i,alg} = 5$  e  $1 \leq m_{i,geom} \leq 4$ . Quindi  $p_f(t) = (i-t)^5$ ,  $\text{tr}(f) = 5i$  e  $\det(f) = i$ .

- $p_{f,min}(t) = (t - i)^3$ ,  $f$  triangolabile ma non diagonalizzabile, con unico autovalore  $i$ . Si ha  $m_{i,alg} = 5$  e  $1 \leq m_{i,geom} \leq 3$ . Quindi  $p_f(t) = (i - t)^5$ ,  $\text{tr}(f) = 5i$  e  $\det(f) = i$ .
- $p_{f,min}(t) = (t - i)(t + i)$ ,  $f$  diagonalizzabile con autovalori  $i$  e  $-i$ . Si ha  $m_i + m_{-i} = 5$  e  $m_i, m_{-i} \geq 1$ . Quindi  $p_f(t) = (i - t)^{m_i}(-i - t)^{m_{-i}}$ ,  $\det(f) = (-1)^{m_{-i}}i$  e  $\text{tr}(f) = (m_i - m_{-i})i$ .
- $p_{f,min}(t) = (t - i)^2(t + i)$ ,  $f$  triangolabile ma non diagonalizzabile, con autovalori  $i$  e  $-i$ . Possiamo avere  $m_{-1} = 1$  e  $m_{i,alg} = 4$  (e quindi  $m_{i,geom} = 1, 2, 3$ ), oppure  $m_{-1} = 2$  e  $m_{i,alg} = 3$  (e quindi  $m_{i,geom} = 1, 2$ ), oppure  $m_{-1} = 3$  e  $m_{i,alg} = 2$  (e quindi  $m_{i,geom} = 1$ ). In ogni caso  $V = \tilde{E}_i \oplus E_{-i}$ . Quindi  $p_f(t) = (i - t)^{m_{i,alg}}(-i - t)^{m_{-1}}$ ,  $\det(f) = (-1)^{m_{-1}}i$  e  $\text{tr}(f) = (m_{i,alg} - m_{-1})i$ .
- $p_{f,min}(t) = (t - i)^3(t + i)$ ,  $f$  triangolabile ma non diagonalizzabile, con autovalori  $i$  e  $-i$ . Possiamo avere  $m_{-i} = 1$  e  $m_{i,alg} = 4$  (e quindi  $m_{i,geom} = 1, 2$ ), oppure  $m_{-i} = 2$  e  $m_{i,alg} = 3$  (e quindi  $m_{i,geom} = 1$ ). In ogni caso,  $V = E_{-i} \oplus \tilde{E}_i$ . Quindi  $p_f(t) = (i - t)^{m_{i,alg}}(-i - t)^{m_{-i}}$ ,  $\det(f) = (-1)^{m_{-i}}i$  e  $\text{tr}(f) = (m_{i,alg} - m_{-i})i$ .
- $p_{f,min}(t) = (t - i)^3(t + i)^2$ ,  $f$  triangolabile ma non diagonalizzabile, con autovalori  $i$  e  $-i$ . Si ha  $m_{i,geom} = m_{-i,geom} = 1$ ,  $m_{i,alg} = 3$  e  $m_{-i,alg} = 2$ . Quindi  $p_f(t) = (i - t)^3(-i - t)^2$ ,  $\det(f) = i$  e  $\text{tr}(f) = i$ .
- Gli altri casi si ottengono da quelli precedenti scambiando i ruoli di  $i$  e  $-i$ .

(d) La condizione aggiuntiva si dice che  $p_{f,min}(t)$  divide anche il polinomio  $t^4 - 2t^2 + 1 = (t^2 - 1)^2 = (t - 1)^2(t + 1)^2$ . Dunque,  $p_{f,min}(t)$  divide il massimo comun divisore di  $(t - 1)^2(t + 1)^2$  e  $(t - 1)(t - 2)^3$ , che è  $t - 1$ . Concludiamo che  $p_{f,min}(t) = t - 1$ . Dunque  $f = I$ , che è diagonale con unico autovalore 1. Quindi  $\text{tr}(f) = 4$  e  $\det(f) = 1$ .