

# Corso di geometria (per fisici)

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

## Esercizi - Foglio 1

### Gruppo 1.

Siano  $A, B$  e  $C$  insiemi. Dimostrare che:

1.  $(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C)$
2.  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
3.  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
4.  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .

### Gruppo 2.

Siano  $A, B, C$  insiemi e  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  applicazioni.

1. Dimostrare che  $g \circ f : A \rightarrow C$  suriettiva  $\implies g$  suriettiva.
2. Dimostrare che  $g \circ f : A \rightarrow C$  iniettiva  $\implies f$  iniettiva.
3. Dimostrare che  $g$  è suriettiva se e solo se  $\exists h : C \rightarrow B$  tale che  $g \circ h = id_C$ .
4. Dimostrare che  $f$  è iniettiva se e solo se  $\exists k : B \rightarrow A$  tale che  $k \circ f = id_A$ .
5. Dimostrare che  $f$  è invertibile se e solo se  $f$  è biiettiva, e che in tal caso l'inversa è unica (e si denota con  $f^{-1}$ ).
6. Siano  $B_1, B_2 \subseteq B$  sottoinsiemi. Dimostrare che  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$  e  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ .
7. Siano  $A_1, A_2 \subseteq A$  sottoinsiemi. Dimostrare che  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$  ma che  $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ . Trovare un esempio in cui  $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ . Dimostrare che, se  $f$  è iniettiva, allora  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ .

8. Sia  $A_1 \subseteq A$  un sottoinsieme. Dimostrare che  $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$  e trovare un esempio in cui non valga l'uguaglianza.
9. Sia  $B_1 \subseteq B$  un sottoinsieme. Dimostrare che  $B_1 \subseteq f(f^{-1}(B_1))$  e trovare un esempio in cui non valga l'uguaglianza.

### Gruppo 3.

1. Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione e definiamo una relazione di equivalenza su  $X$  come segue:  $x_1 \sim x_2$  se e solo se  $f(x_1) = f(x_2)$ . Dimostrare che l'applicazione  $\bar{f} : X/\sim \rightarrow f(X)$  data da  $\bar{f}([x]) = f(x)$  è ben definita e biettiva.
2. Dati  $x, y \in \mathbb{Q}$ , scriviamo  $x \sim y$  se e solo se  $xy \geq 0$ . È  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $\mathbb{Q}$ ? Se sì, quanti elementi ha l'insieme quoziente  $\mathbb{Q}/\sim$ ?
3. Dati  $x, y \in \mathbb{Q}$ , scriviamo  $x \sim y$  se e solo se  $x - y \in \mathbb{N}$ . È  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $\mathbb{Q}$ ?
4. Dati  $x, y \in \mathbb{Q}$ , scriviamo  $x \sim y$  se e solo se  $x - y \in \mathbb{Z}$ . È  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $\mathbb{Q}$ ?  
È l'operazione  $[x] + [y] := [x + y]$  ben definita su  $\mathbb{Q}/\sim$ ? Definisce un gruppo?  
È l'operazione  $[x] \cdot [y] := [x \cdot y]$  ben definita su  $\mathbb{Q}/\sim$ ? Definisce un gruppo?
5. Fissiamo due numeri razionali  $a, b \in \mathbb{Q}$ .  
Dati due polinomi  $p(t), q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ , scriviamo  $p(t) \sim q(t)$  se e solo se  $p(a) = q(b)$ . È questa una relazione di equivalenza?

### Gruppo 4.

1. Sia  $\eta = 3^{1/3}$ , cosicché  $\eta^3 = 3$ . Definiamo  $\mathbb{Q}[\eta] := \{a + b\eta + c\eta^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$  con le ovvie operazioni di somma e prodotto. Dimostrare che  $\mathbb{Q}[\eta]$  è un campo.
2. L'insieme dei polinomi  $\mathbb{Q}[t]$  con le operazioni di somma e prodotto è un campo?  
Definiamo  $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$  come l'insieme di tutte le espressioni del tipo  $a_{-k}t^{-k} +$

$a_{-k+1}t^{-k+1} + \dots + a_{d-1}t^{d-1} + a_d t^d$ , dove  $k, d \in \mathbb{N}$  e  $a_i \in \mathbb{Q}$  per ogni  $-k \leq i \leq d$ . Con le ovvie operazioni di somma e prodotto, è  $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$  un campo?

3. Sia  $n \geq 2$  intero. Dimostrare che, se  $n$  non è primo, allora esistono  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/n$  non nulli tali che  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0}$ . Concludere che  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  non hanno un inverso per la moltiplicazione e che quindi  $\mathbb{Z}/n$  non è un campo.
4. Sia  $p \geq 2$  intero primo. Dimostrare che, se  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/p$  sono non nulli, allora  $\bar{a} \cdot \bar{b} \neq \bar{0}$ . Dimostrare che, se  $\bar{a} \in \mathbb{Z}/p$  non è nullo, allora  $\bar{a}, \bar{a}^2, \bar{a}^3, \dots, \bar{a}^p$  sono tutti non nulli ma non sono tutti distinti e quindi  $\bar{a}^i = \bar{a}^j$  per qualche  $i \neq j$ . Concludere che ogni  $\bar{a} \neq \bar{0}$  ha un inverso per la moltiplicazione e che quindi  $\mathbb{Z}/p$  è un campo.
5. Sia  $\mathbb{K}$  un campo con infiniti elementi e sia  $p(t) \in \mathbb{K}[t]$  un polinomio a coefficienti in  $\mathbb{K}$ . Dimostrare che, se  $p(a) = 0$  per ogni  $a \in \mathbb{K}$ , allora  $p(t)$  è il polinomio nullo.
6. Sia  $p \geq 2$  un intero primo e sia  $q(t) \in \mathbb{Z}/p[t]$  un polinomio a coefficienti nel campo  $\mathbb{Z}/p$ . Supponiamo che  $q(a) = 0$  per ogni  $a \in \mathbb{Z}/p$ . Dimostrare che  $q(t)$  non è necessariamente il polinomio nullo.
7. Sia  $p(t) = a + bt + ct^2 \in \mathbb{R}[t]$ . Per quali valori di  $a, b, c \in \mathbb{R}$  la funzione polinomiale  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è iniettiva o suriettiva?  
Analogamente per  $q(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \in \mathbb{R}[t]$ .