NOME: COGNOME:

Corso di geometria (per fisici) - Canale C

LUNEDÌ 6 SETTEMBRE 2010

PROVA SCRITTA - DURATA: 2 ORE

Norme per le prove in itinere e per le prove scritte d'esame.

- Scrivere subito nome e cognome in cima ad ognuno di questi fogli.
- Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte possono essere utilizzati per la brutta copia.
- Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, giustificando rigorosamente ogni risposta e senza far riferimento alla brutta copia. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
- Non è consentito consultare testi, appunti, cellulari, calcolatrici o altro strumento elettronico, né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Parte riservata alla correzione

PROBLEMA	PUNTEGGIO
1.	
2.	
3.	
Totale	

COGNOME:

Esercizio 1.

Sia $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle matrici complesse $n \times n$ e sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un suo sottoinsieme. Consideriamo l'insieme $\mathfrak{C}(\mathcal{S})$ delle matrici $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tali che $AX = XA$ per ogni $A \in \mathcal{S}$.

(a) Dimostrare che $\mathfrak{C}(\mathcal{S})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e che $\mathfrak{C}(\mathcal{S}) = \mathfrak{C}(\text{span}\{\mathcal{S}\})$.

(b) Siano $A \in \mathcal{S}$, $v \in \mathbb{C}^n$ un autovettore di A di autovalore λ e $X \in \mathfrak{C}(\mathcal{S})$.
Dimostrare che anche $Xv \in \mathbb{C}^n$ è un autovettore di A di autovalore λ.

(c) È vero che, se $\mathcal{Y} = \{Y\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ consiste della sola matrice diagonale Y con $Y_{k,k} = k$, allora $\mathfrak{C}(\mathcal{Y})$ è il sottospazio $\mathcal{D}$ delle matrici diagonali?
È vero che $\mathfrak{C}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$?

(d) Trovare una base dello spazio vettoriale $\mathfrak{C}(\mathcal{S})$ quando $\mathcal{S} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Cognome:

Esercizio 2.

Sia M la matrice reale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare una base del nucleo di M. Determinare il rango di M.

(b) Determinare il polinomio caratteristico di M, gli autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Dire se M è triangolabile e/o diagonalizzabile. Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ che mette M in forma diagonare (se diagonalizzabile) o triangolare (se triangolabile).

(d) Sia $\mathbb{R}^4$ munito della distanza euclidea standard.
Determinare i vettori $v = \overrightarrow{OP} \in \mathbb{R}^4$ del nucleo di M tali che P ha distanza minima dal punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

COGNOME:

Esercizio 3.

Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti reali e sia $q_k(p(t)) = 2p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 - kp(-1)$ una forma quadratica su V dipendente dal parametro reale k.

(a) Sia b_k il prodotto scalare associato a q_k Determinare la matrice M_k che rappresenta il prodotto scalare b_k rispetto alla base standard $\mathcal{C} = \{v_1 := 1, v_2 := t, v_3 := t^2\}$ di V.

(b) Determinare gli indici di positività, nullità e negatività del prodotto scalare b_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(c) Sia $d : V \to V$ l'operatore "derivata" $d(p(t)) = p'(t)$ e sia $d^T : V^* \to V^*$ la sua applicazione duale. Se $\varphi : V \to \mathbb{R}$ è il funzionale $\varphi(p(t)) := p(3)$, esprimere $d^T(\varphi)$ in termini della base duale $\mathcal{C}^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$.

(d) Fissiamo $k = 0$ e sia $d^* : V \to V$ l'aggiunto di d rispetto a b_0. Determinare la matrice che rappresenta d^* rispetto alla base $\mathcal{C}$.