Nome: Cognome:

Corso di geometria (per fisici) - Canale C

Lunedì 5 luglio 2010

Prova scritta - Durata: 2 ore

Norme per le prove in itinere e per le prove scritte d'esame.

- Scrivere subito nome e cognome in cima ad ognuno di questi fogli.
- Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte possono essere utilizzati per la brutta copia.
- Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, giustificando rigorosamente ogni risposta e senza far riferimento alla brutta copia. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
- Non è consentito consultare testi, appunti, cellulari, calcolatrici o altro strumento elettronico, né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Parte riservata alla correzione

Problema	Punteggio
1.	
2.	
3.	
Totale	

Cognome:

Esercizio 1.

Sia $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici reali $n \times m$ e sia A una matrice reale fissata $p \times n$. Definiamo l'applicazione

$$f_A : \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$$

come $f_A(X) = AX$.

(a) Calcolare la dimensione di $\ker(f_A)$ e di $\mathrm{Im}(f_A)$ in funzione di A.

(b) Siano ora $n = m = p$. Calcolare l'aggiunto di f_A rispetto alla forma bilineare simmetrica $b : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ data da $b(X,Y) = \mathrm{tr}(X^T \cdot Y)$.

(c) Per $n = m = p$, supponiamo che A sia diagonale con $A_{i,i} > 0$ per ogni i. Dimostrare che $b'(X,Y) := b(X, f_A(Y))$ è una forma bilinare simmetrica su $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ e calcolarne gli indici di positività, negatività e nullità.

Cognome:

Esercizio 2.

Sia $\mathbb{R}^4$ lo spazio vettoriale reale 4-dimensionale munito del prodotto scalare standard. Siano $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2-x_3 = x_2-2x_4 = 0\}$ e $W = \text{span}(e_1+e_3, e_1-e_2)$ sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$.

(a) Trovare una base di $U \cap W$ e calcolare la dimensione di $U + W$ e di $U \cap W$.

(b) Trovare una base di $(U + W)^{\perp}$.

(c) Sia L la retta affine passante per $P = (0, 1, 0, 0)^T$ e $Q = (0, 1, 1, 0)^T$. Calcolare i punti di intersezione di L con il sottospazio U e di L con il sottospazio W.

(d) Determinare equazioni parametriche per la proiezione ortogonale di L sul sottospazio $U + W$.

Cognome:

Esercizio 3.
Dato $c \in \mathbb{R}$, sia $f_c : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ un'applicazione $\mathbb{K}$-lineare tale che $f_c^4 = f_c^2 + cI$, dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(a) Determinare i valori di $c \in \mathbb{R}$ per i quali esistono applicazioni f_c non triangolabili oppure non diagonalizzabili su $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(b) Supponendo $c = 2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, quali sono le possibili $\operatorname{tr}(f_2)$ e i corrispondenti polinomi caratteristici?

(c) Supponendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, per quali valori di $c \in \mathbb{R}$ una tale f_c può essere un'applicazione ortogonale?