Corso di geometria (per fisici) - Canale C

Lunedì 5 luglio 2010

Prova scritta - Soluzioni

Esercizio 1.

(a) $X \in \ker(f_A) \iff AX = 0 \iff \mathrm{Im}(X) \subseteq \ker(A)$. Dunque $\ker(f_A) \cong \{X : \mathbb{R}^m \to \ker(A)\}$, che ha quindi $\dim(\ker(f_A)) = m \cdot \dim(\ker(A))$.

Inoltre, $\dim(\mathrm{Im}(f_A)) = \dim(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})) - \dim(\ker(A)) = nm - m \cdot \dim(\ker(A)) = m(n - \dim(\ker(A))) = m \cdot \dim(\mathrm{Im}(A))$.

(b) Notiamo che $b(X,X) = \sum_{i,j=1}^{n} X_{i,j}^2$ e quindi $b(X,X) > 0$ se $X \neq 0$, ossia b è definito-positivo.

Poiché b è definito-positivo, b è non degenere e quindi l'aggiunto di f_A esiste ed è unico.

Vogliamo $b(f_A^*(X), Y) = b(X, f_A(Y))$. Poiché $b(X, f_A(Y)) = \mathrm{tr}(X^T AY) = \mathrm{tr}((A^T X)^T Y)$, concludiamo che $f_A^*(X) = A^T X$ è l'aggiunto di f_A rispetto a b.

(c) b' è bilineare, perché b è bilineare e f_A è lineare. Inoltre, b è simmetrica perché $A = A^T$ e quindi $b'(X,Y) = \mathrm{tr}(X^T AY)$ (ossia $f_A = f_A^*$ è autoaggiunto).

Calcoliamo $b'(X,X) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,i} X_{i,j}^2$ e quindi $b'(X,X) > 0$ se $X \neq 0$. Dunque b' è definito-positivo e ha perciò $n_+ = n$ e $n_- = n_0 = 0$.

Esercizio 2.

(a) Notiamo che W ha come base $\{e_1+e_3, e_1-e_2\}$ e quindi $\dim(W) = 2$ e che le due equazioni $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $x_2 - 2x_4 = 0$ non sono proporzionali, cosicché $\dim(U) = 4 - 2 = 2$.

Una base di $U \cap W$ è data da $\{e_1 + e_3\}$ e quindi $\dim(U \cap W) = 1$ e, per Grassmann, $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$.

(b) Ricordiamo che $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ e ha dimensione $\dim(U+W)^\perp = 4 - \dim(U+W) = 4 - 3 = 1$.

Dalle equazioni che definiscono U, notiamo che una base di $U^\perp$ è data da $\{v_1 := e_1 + e_2 - e_3, v_2 := e_2 - 2e_4\}$

Un vettore di $U^\perp$ del tipo $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$ appartiene a $W^\perp \iff v$ è perpendicolare a $e_1 + e_3$ e $e_1 - e_2$. Questo vuol dire

$$\begin{cases} \langle v, e_1 + e_3 \rangle = 0a + 0b = 0 & \text{automaticamente soddisfatta} \\ \langle v, e_1 - e_2 \rangle = 0a + b = 0 \end{cases}$$

che implica $b = 0$.

Dunque $(U + W)^\perp$ ha come base $\{v_1 = e_1 + e_2 - e_3\}$.

(c) La retta L ha equazione parametrica $P + tw = (0, 1, t, 0)^T$ con $t \in \mathbb{R}$, dove $w = Q - P = e_3$.

L'intersezione $L \cap U$ si ha quando $\begin{cases} 1 - t = 0 \\ 1 - 0 = 0 \end{cases}$, che è assurdo. Dunque $L \cap U = \emptyset$.

L'intersezione $L \cap W$ si ha quando $(0,1,t,0)^T = a(e_1+e_3) + b(e_1 - e_2)$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$. Questo vuol dire

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -b=1 \\ a=t \\ 0=0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $\begin{cases} a=t=1 \\ b=-1 \end{cases}$, ossia $L \cap W = \{(0,1,1,0)^T\}$.

(d) La retta L si può scrivere come $L = \{(0,1,1,0)^T + s\,e_3 \mid s \in \mathbb{R}\}$. Poiché $(0,1,1,0)^T \in W \cap L$, la proiezione ortogonale di L su $U+W$ è della forma $(0,1,1,0)^T + su$, dove u è la proiezione ortogonale del vettore e_3 su $U+W$.

Ora, la proiezione ortogonale di e_3 su $(U+W)^\perp$ è data da $\frac{1}{3}\langle u, e_1+e_2-e_3\rangle(e_1+e_2-e_3) = -\frac{e_1+e_2-e_3}{3}$ e quindi $u = e_3 - (-\frac{1}{3}(e_1+e_2-e_3)) = \frac{e_1+e_2-2e_3}{3}$.

Concludiamo che la proiezione di L su $U+W$ ha equazione parametrica $(0,1,1,0)^T + s(e_1+e_2-2e_3) = (s, 1+s, 1-2s, 0)^T$ con $s \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.

Dato $c \in \mathbb{R}$, sia $f_c : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ un'applicazione $\mathbb{K}$-lineare tale che $f_c^4 = f_c^2 + cI$, dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(a) f_c è triangolabile su $\mathbb{C}$ per ogni c.

Per la diagonalizzabilità, notiamo che il polinomio $q(t) = t^4 - t^2 - c$ è multiplo del polinomio minimo di f_c. Le radici di $q(t)$ sono date da

$$\pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}}$$

Dunque, si possono avere radici multiple soltanto se $1+4c=0$ oppure se $1 \pm \sqrt{1+4c} = 0$.

Nel primo caso, otteniamo $c = -1/4$. Nel secondo caso, otteniamo $c = 0$.

Dunque, $q(t)$ e quindi $p_{min,f_c}(t)$ hanno radici distinte se $c \neq 0, -1/4$ e perciò in questi casi f_c è sicuramente diagonalizzabile.

Per $c = 0$ e per $c = -1/4$ ci sono esempi di f_c non diagonalizzabili.

(b) Per $c = 2$, otteniamo $q(t) = (t^2-2)(t^2+1) = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(t^2+1)$. Inoltre il polinomio minimo di f_2 ha grado al più 3. I casi sono:

- $p_{min}(t) = (t-\sqrt{2})$, $p(t) = (t-\sqrt{2})^3$, e quindi $\mathrm{tr}(f_2) = 3\sqrt{2}$
- $p_{min}(t) = (t+\sqrt{2})$, $p(t) = (t+\sqrt{2})^3$ e quindi $\mathrm{tr}(f_2) = -3\sqrt{2}$
- $p_{min}(t) = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$ e quindi $p(t) = (t-\sqrt{2})^2(t+\sqrt{2})$ e $\mathrm{tr}(f_2) = \sqrt{2}$, oppure $p(t) = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})^2$ e $\mathrm{tr}(f_2) = -\sqrt{2}$
- $p_{min}(t) = (t-\sqrt{2})(t^2+1) = p(t)$, e quindi $\mathrm{tr}(f_2) = \sqrt{2}$
- $p_{min}(t) = (t+\sqrt{2})(t^2+1) = p(t)$, e quindi $\mathrm{tr}(f_2) = -\sqrt{2}$.

(c) Se f_c è ortogonale, i suoi autovalori hanno valore assoluto $= 1$.

Dal caso (a), otteniamo $1 \pm \sqrt{1+4c} = \pm 2$, ossia $1+4c = 1$ oppure $1+4c = 9$, da cui $c = 0$ oppure $c = 2$.

Nel caso $c = 0$ troviamo $f_c = I$ che è ortogonale. Nel caso $c = 2$, l'analisi in (b) ci dice che c'è sempre un autovalore del tipo $\pm\sqrt{2}$, e quindi f_2 non può essere ortogonale.

Concludiamo che f_c può essere ortogonale soltanto per $c = 0$.