Nome: Cognome:

Corso di geometria (per fisici) - Canale C

Martedì 16 febbraio 2010

Prova scritta - Durata: 2 ore

Norme per le prove in itinere e per le prove scritte d'esame.

- Scrivere subito nome e cognome in cima ad ognuno di questi fogli.
- Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte possono essere utilizzati per la brutta copia.
- Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, giustificando rigorosamente ogni risposta e senza far riferimento alla brutta copia. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
- Non è consentito consultare testi, appunti, cellulari, calcolatrici o altro strumento elettronico, né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Parte riservata alla correzione

Problema	Punteggio
1.	
2.	
3.	
Totale	

Cognome:

Esercizio 1.

Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi in t a coefficienti reali di grado al massimo 3. Sia inoltre $b : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito come

$$b(p(t), q(t)) := \int_0^1 p(t)q(t)\,dt - \int_{-1}^0 p(t)q(t)\,dt$$

(a) Scrivere la matrice che rappresenta b rispetto alla base standard $\mathcal{C}$ di V.

(b) Determinare gli indici di positività, negatività e nullità di b.

(c) Trovare un sottospazio $W \subset V$ isotropo per b di dimensione massima.

COGNOME:

Esercizio 2.

Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale reale tridimensionale munito del prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle$. Sia $U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e $W_k = \mathrm{span}(e_1 + e_2, 2e_1 - ke_3)$ un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ che dipende dal parametro $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare matrice che rappresenta la riflessione ortogonale ρ rispetto al sottospazio $U \subset \mathbb{R}^3$.

(b) Trovare una base di $U \cap W_k$.

(c) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che $\sigma_k \circ \rho$ è diagonalizzabile, dove σ_k è la riflessione ortogonale rispetto al sottospazio W_k. *(Suggerimento: ragionare geometricamente!)*

Cognome:

Esercizio 3.
Sia $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un'applicazione $\mathbb{K}$-lineare tale che $f^2 = -I$, dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(a) Dire se f è triangolabile/diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e se lo è su $\mathbb{C}$.

(b) Dimostrare che, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, allora $\mathrm{tr}(f) = 0$ e n è pari (e quindi $n = 2m$ per un certo intero m).

(c) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $n = 2$. Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $F^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.