

Corso di geometria (per fisici) - Canale C

MARTEDÌ 16 FEBBRAIO 2010

PROVA SCRITTA - SOLUZIONI

Esercizio 1.

(a) Dalla definizione

$$F_C^C(b)_{ij} = b(t^{i-1}, t^{j-1}) = \int_0^1 t^{i+j-2} dt - \int_{-1}^0 t^{i+j-2} dt = \frac{1}{i+j-1} \left([t^{i+j-1}]_0^1 - [t^{i+j-1}]_{-1}^0 \right)$$

e quindi

$$F_C^C(b)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i+j \text{ è pari} \\ \frac{2}{i+j+1} & \text{se } i+j \text{ è dispari} \end{cases}$$

ossia

$$F_C^C(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Il polinomio caratteristico di $F_C^C(b)$ è

$$p(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & -t & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -t & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & -t \end{pmatrix} = t^4 - \frac{29}{18}t^2 + \frac{1}{144}$$

Poiché il determinante è non nullo, b è non degenere, e quindi $n_0 = 0$. Dalla regola di Cartesio, avendo $p(t)$ due variazioni di segno, concludiamo che $n_+ = 2$ e quindi $n_- = 2$.

(c) La dimensione massima di un sottospazio isotropo è $n_0 + \min\{n_+, n_-\} = 2$. Si può verificare facilmente che un esempio di tale sottospazio è $U = \text{span}(1, t^2)$.

Esercizio 2.

(a) U^\perp è generato da $z = e_1 + 2e_2 + e_3$. Notiamo che $\|z\|^2 = 6$. La proiezione ortogonale Π su U^\perp è data da

$$\Pi(v) = \frac{1}{6} \langle v, z \rangle z$$

e dunque la riflessione ortogonale che fissa U è data da

$$\rho(v) = v - 2\Pi(v) = v - \frac{1}{3} \langle v, z \rangle z$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \rho(e_1) &= e_1 - \frac{1}{3}z = \frac{2e_1 - 2e_2 - e_3}{3} \\ \rho(e_2) &= e_2 - \frac{2}{3}z = \frac{-2e_1 - e_2 - 2e_3}{3} \\ \rho(e_3) &= e_3 - \frac{1}{3}z = \frac{-e_1 - 2e_2 + 2e_3}{3} \end{aligned}$$

e dunque

$$\rho = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (b) Se $\Phi_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è l'applicazione lineare che ha come immagine W_k definita da $\Phi_k(e_1) = e_1 + e_2$ e $\Phi_k(e_2) = 2e_1 - ke_3$, e $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è il funzionale $\psi = (1 \ 2 \ 1)$, la composizione $\psi \circ \Phi_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è data da funzionale $\psi \circ \Phi_k = (3 \ 2 - k)$, che ha nucleo generato da $\frac{1}{3}[(k-2)e_1 + 3e_2]$. Dunque $U \cap W_k$ ha base data dal solo vettore $\Phi_k((k-2)e_1 + 3e_2) = (k+4)e_1 + (k-2)e_2 - 3ke_3$.
- (c) σ_k e ρ sono ortogonali e con determinante -1 , dunque $\sigma_k \circ \rho$ è ortogonale e con determinante 1 . Essa fissa certamente $U \cap W_k$, in quanto questa retta è fissata sia da σ_k sia da ρ , e quindi $\sigma_k \circ \rho$ lascia il suo ortogonale $(U \cap W_k)^\perp$ invariante. Più precisamente, la restrizione di $\rho \circ \sigma_k$ al piano $(U \cap W_k)^\perp$ ha determinante 1 e quindi è una rotazione. Quindi $\rho \circ \sigma_k$ è diagonalizzabile se e solo se è rotazione attorno all'asse $U \cap W_k$ di angolo 0 oppure π .

Per essere una rotazione di angolo 0 , dovrebbe aversi $\rho \circ \sigma_k = I$, ossia $\rho = \sigma_k^{-1} = \sigma_k$ e questo implicherebbe necessariamente $U = W_k$. Ma $U \neq W_k$ per ogni k (essendo $U \cap W_k$ sempre di dimensione 1).

Dunque l'unica possibilità è che $\rho \circ \sigma_k$ sia una rotazione di angolo π , e questo avviene se e solo se $U^\perp \subset W_k$, ovvero $z \in W_k$. Questo succede se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

ha rango 2 (ovvero è singolare). Con una riduzione di Gauss (oppure calcolando il determinante) si verifica che questo avviene se e solo se $k = 2$.

Esercizio 3.

- (a) Se $q(t) = t^2 + 1$, si ha $q(f) = 0$. Dunque il polinomio minimo di f divide q . Su \mathbb{R} , $q(t)$ è irriducibile e quindi il polinomio minimo è $q(t)$, che non ha radici reali, e dunque f non è triangolabile su \mathbb{R} .
Su \mathbb{C} , $q(t) = (t-i)(t+i)$ e dunque il polinomio minimo è prodotto di fattori distinti di primo grado (con potenza uno), da cui segue che f è diagonalizzabile su \mathbb{C} .
- (b) Su \mathbb{R} , $p_{\min, f}(t) = t^2 + 1$ che è irriducibile. Dunque il polinomio caratteristico di f è $p_f(t) = (t^2 + 1)^m$ con $2m = n$. Poiché il termine di grado $n-1$ in $p_f(t)$ ha coefficiente nullo, ne segue che $\text{tr}(f) = 0$.
- (c) Sia $0 \neq v_1 \in \mathbb{R}^2$ un vettore qualunque non nullo e poniamo $v_2 = f(v_1)$. Poiché $f(v_2) = f^2(v_1) = -v_1 \neq 0$, ne segue che $f(v_2) \neq 0$. Inoltre, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è un insieme di vettori indipendenti, perché f non ha autovettori in \mathbb{R}^2 . Ne segue che \mathcal{B} è una base di \mathbb{R}^2 . Si verifica immediatamente che $F_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ha la forma desiderata.