Nome: Cognome:

# Corso di geometria (per fisici) - Canale C

Lunedì 1 febbraio 2010

Prova scritta - Durata: 2 ore

Norme per le prove in itinere e per le prove scritte d'esame.

- Scrivere subito nome e cognome in cima ad ognuno di questi fogli.
- Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte possono essere utilizzati per la brutta copia.
- Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, giustificando rigorosamente ogni risposta e senza far riferimento alla brutta copia. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.
- Non è consentito consultare testi, appunti, cellulari, calcolatrici o altro strumento elettronico, né usare fogli diversi da quelli distribuiti.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

**Parte riservata alla correzione**

| Problema | Punteggio |
|---|---|
| **1.** | |
| **2.** | |
| **3.** | |
| **Totale** | |

Cognome:

**Esercizio 1.**
Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale reale dei polinomi in $t$ di grado al più 3 e sia $\mathcal{C} = \{1, t, t^2, t^3\}$ la base standard di $V$. Sia inoltre $f : V \to V$ l'applicazione $\mathbb{R}$-lineare definita come $f(p(t)) := p(1)t^2 + (t-1)p'(1) + 2t^2p''(t)$.

(a) Scrivere la matrice che rappresenta $f$ rispetto alla base $\mathcal{C}$.

(b) Sia $W \subseteq V$ il sottospazio dei polinomi $p(t) \in \mathrm{Im}(f)$ tali che $p(0) + p'(0) = 0$. Trovare una base di $W$ e calcolarne la dimensione.

COGNOME:

**Esercizio 2.**

Data $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito come $b(v, w) = v^T S w$.

(a) Calcolare gli indici di positività, negatività e nullità di $b$.

(b) Trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^3$ isotropo per $b$ di dimensione massima ed esibire una base di $W$.

(c) Calcolare l'aggiunta $T^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto al prodotto scalare $b$.

COGNOME:

**Esercizio 3.**
Sia $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare tale che $Q^5 + Q^3 = 2Q$.

(a) Supponendo che $\det(Q) = 2$, determinare le possibili $\mathrm{tr}(Q)$ e dire se $Q$ è triangolabile e/o diagonalizzabile.

(b) Supponendo $Q$ ortogonale (e con $\det(Q) = \pm 1$), determinare le possibili $\mathrm{tr}(Q)$.