Corso di geometria (per fisici) - Canale C

Lunedì 1 febbraio 2010

Esame scritto - Soluzioni

Esercizio 1.

(a) $f(1) = t^2$, $f(t) = t^2 + t - 1$, $f(t^2) = t^2 + 2(t-1) + 4t^2 = 5t^2 + 2t - 2$, $f(t^3) = t^2 + 3(t-1) + 12t^3 = 12t^3 + t^2 + 3t - 3$. Dunque

$$F_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

(b) Poiché le prime tre colonne di $F_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ sono linearmente dipendenti, una base di $\mathrm{Im}(f)$ è data da

$$\left\{p_1 = t^2, p_2 = -1 + t + t^2, p_3 = -3 + 3t + t^2 + 12t^3\right\}$$

Inoltre, $p_k(0) + p_k'(0) = 0$ per $k = 1, 2, 3$. Dunque $\dim(W) = 3$ e $W = \mathrm{Im}(f)$ ha base $\{p_1, p_2, p_3\}$.

Esercizio 2.

(a) Sviluppando rispetto all'ultima colonna, si ha $\det(S) = -1$. Dunque $n_0 = 0$ e n_- è dispari. Dato che siamo in dimensione 3, si ha necessariamente $n_- = 1$ e quindi $n_+ = 2$.

(b) La massima dimensione di un sottospazio isotropo è $1 = n_0 + \min\{n_+, n_-\}$. Dunque, basta trovare un vettore isotropo $w \neq 0$ e porre $W = \mathrm{span}(w)$, per esempio $w = e_1 + e_2$.

(c) Poiché b è non degenere, T^* esiste ed è unica, e si ottiene come $T^* = S^{-1}T^tS$. Dato che

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 1 \\ -5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$T^* = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 1 \\ -5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 10 & 5 \\ -7 & 9 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3.

(a) Supponendo che $\det(Q) = 2$, determinare le possibili $\mathrm{tr}(Q)$ e dire se Q è triangolabile e/o diagonalizzabile.

Sia $q(t) = t^5 + t^3 - 2t$. Abbiamo $q(Q) = 0$ e dunque $p_{min,Q}(t)$ divide $q(t)$ e ha grado al massimo 3. Inoltre, $p_Q(t)$ ha grado esattamente 3 ed è multiplo di $p_{min,Q}(t)$. Poiché $q(t) = t(t-1)(t+1)(t^2+2)$, necessariamente $p_Q(t) = -t^a(t-1)^b(t+1)^c(t^2+2)^d$, con $a + b + c + 2d = 3$. Dato che $\det(Q) = 2$, il termine noto di $p_Q(t)$ deve essere 2. Dunque necessariamente $p_Q(t) = (1-t)(t^2+2) = -t^3 + t^2 - 2t + 2$, il che implica che Q non è triangolabile (e quindi nemmeno diagonalizzabile) e che $\mathrm{tr}(Q) = 1$.

(b) Poiché Q è ortogonale, i suoi autovalori sono di valore assoluto 1. Poiché $q(Q) = 0$, il polinomio minimo $p_{Q,min}(t)$ divide $q(t) = t(t-1)(t+1)(t^2+2)$, e quindi gli autovalori di Q possono essere soltanto 1 e -1. Dunque $p_Q(t) = -(t-1)^a(t+1)^{3-a}$, con $a = 0, 1, 2, 3$. Corrispondentemente, avremo $\mathrm{tr}(Q) = -3, -1, 1, 3$.