

Corso di Eccellenza

TERZO ANNO DI MATEMATICA

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

Esame - 15 dicembre 2009

TEMPO: 2 ORE

Esercizio 1.

Sia $V = \mathbb{R}^n$ e sia $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica di segnatura $(p, n-p)$ con $p \geq n-p$ (per esempio, la forma quadratica associata a b potrebbe essere $b(v, v) = v_1^2 + \dots + v_p^2 - v_{p+1}^2 - \dots - v_n^2$).

- (a) Dimostrare che la sfera unitaria $S = \{v \in V \mid b(v, v) = 1\}$ è compatta se e solo se $p = n$.
- (b) Dimostrare che il gruppo ortogonale $O(V, b)$ agisce su S transitivamente e concludere che $O(V, b)$ è compatto se e solo se $p = n$.
- (c) Nel caso $n = 2$, $p = 1$ e $b(v) = v_1^2 - v_2^2$, calcolare esplicitamente: $T_e O(V, b)$ (come sottospazio di $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$), la sua dimensione e le matrici che rappresentano gli elementi del gruppo $O(V, b)$. Determinare esplicitamente le componenti connesse di $O(V, b)$.

Esercizio 2.

Sia $V = \mathbb{R}^n$ e siano $0 \leq p, q \leq n$ con $p + q \leq n$. Consideriamo l'insieme $G(p, q, V)$ delle coppie (U, W) , dove $U, W \subseteq V$ sono sottospazi vettoriali reali di dimensione p e q tali che $U \cap W = \{0\}$.

- (a) Dimostrare che $GL(V)$ agisce transitivamente sull'insieme $G(p, q, V)$. Scelto un punto $x = (U, W) \in G(p, q, V)$, munire $G(p, q, V)$ della topologia indotta dalla suriezione

$$\begin{array}{ccc} GL(V) & \longrightarrow & G(p, q, V) \\ g \mapsto & \longrightarrow & g \cdot x = (g(U), g(W)) \end{array}$$

Presentare $G(p, q, V)$ come spazio omogeneo per l'azione di $GL(V)$.

- (b) Calcolare la dimensione di $G(p, q, V)$ e dire se è compatto.
- (c) Dire se $G(p, q, V)$ ammette una metrica riemanniana invariante per l'azione di $GL(V)$.
- (d) Dire se $G(1, 1, \mathbb{R}^3)$ è orientabile.
- (e) Dire se $G(1, 1, \mathbb{R}^3)$ ammette una forma di volume non nulla e invariante per l'azione di $GL_3(\mathbb{R})$.