

Corso di Eccellenza

TERZO ANNO DI MATEMATICA

ANNO ACCADEMICO 2009/2010

Esame - 10 marzo 2010

TEMPO: 2 ORE

Esercizio 1.

Sia $V = \mathbb{R}^{2n}$ e sia $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare alterna non degenera $\omega(v_1, v_2) := v_1^T J v_2$ indotta dalla matrice

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & -I_n \\ \hline I_n & 0_n \end{array} \right)$$

Sia $\text{LaGr}(V, \omega) \subset \text{Gr}(n, V)$ il luogo dei sottospazi lagrangiani di V , ossia dei sottospazi $W \subset V$ di dimensione reale n tali che $\omega(w, w') = 0$ per ogni $w, w' \in W$.

- Identificando \mathbb{R}^{2n} con \mathbb{C}^n e J con la moltiplicazione per $\sqrt{-1}$, dimostrare che il gruppo $U(n)$ agisce transitivamente su $\text{LaGr}(V)$.
- Determinare lo stabilizzatore del sottospazio reale $W_0 = \text{span}_{\mathbb{R}}(e_1, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^{2n}$. Calcolare $\dim_{\mathbb{R}}(\text{LaGr}(V, \omega))$.
- Determinare se $\text{LaGr}(V, \omega)$ sia orientabile.
- Dire se $\text{LaGr}(V, \omega)$ ammetta una metrica riemanniana $U(n)$ -invariante.

Esercizio 2.

Sia \mathcal{M} lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$. Chiamiamo $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}$ il luogo delle matrici di rango esattamente k e $\mathcal{M}_{\leq k} \subset \mathcal{M}$ il luogo delle matrici di rango al più k .

- Guardando i minori $(k+1) \times (k+1)$, dimostrare che $\mathcal{M}_{\leq k}$ è un chiuso di \mathcal{M} e in effetti coincide con la chiusura di \mathcal{M}_k .
- Per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_1$, trovare un insieme minimale di equazioni locali per $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$ intorno ad A . (*Suggerimento: guardare i minori 2×2 .*)
Dimostrare che \mathcal{M}_1 è una varietà differenziabile e calcolarne la dimensione.
- Dimostrare che \mathcal{M}_k è una varietà differenziabile e calcolarne la dimensione per ogni k . (*Suggerimento: guardare i minori $(k+1) \times (k+1)$.*)
- È \mathcal{M}_k uno spazio omogeneo?