Corso di Eccellenza

Terzo anno di Matematica

Anno accademico 2009/2010

Note varie

Definizione. Un *gruppo topologico* (G, e) è uno spazio topologico puntato munito applicazioni continue $m : G \times G \to G$ e $i : G \to G$ tali che la moltiplicazione m dà a G una struttura di gruppo, in cui e è l'elemento neutro e $i(g)$ è l'inverso di g per ogni $g \in G$.

Definizione. Un *gruppo di Lie* (G, e) è una varietà differenziabile che è anche un gruppo topologico, in cui $m : G \times G \to G$ e $i : G \to G$ sono differenziabili.

Esempi.

1. Se G è un gruppo topologico e $H \subset G$ è un sottogruppo, allora H è un sottogruppo topologico con la topologia indotta.

2. Gli spazi vettoriali $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ con la topologia classica sono gruppi di Lie (con l'operazione di somma). Dunque, i sottogruppi di $\mathbb{C}^n$ sono gruppi topologici con l'operazione indotta.

3. Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, i gruppi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}), \mathrm{O}_n(\mathbb{K}), \mathrm{SU}_n, \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{K})$ sono tutti gruppi di Lie.

4. Se F è uno spazio topologico, il gruppo $\mathrm{Homeo}(F)$ degli omeomorfismi di F in sé munito della topologia compatta-aperta è un gruppo topologico. (Nota: se F è uno spazio metrico, la topologia compatta-aperta su $\mathrm{Homeo}(F)$ è data anche dalla convergenza uniforme sui compatti di F.)

5. I quaternioni $\mathbb{H} = \{a + ib + jc + kd \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ sono uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base $\{1, i, j, k\}$. Formano un corpo con la moltiplicazione in cui 1 è l'elemento neutro e $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$,

$ki = -ik = j$ (estesa ad $\mathbb{H}$ in modo $\mathbb{R}$-lineare e distributivo). Si può verificare che $\|a+ib+jc+kd\|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$ definisce una norma su $\mathbb{H}$. La sfera unitaria delle unità quaternioniche è diffeomorfa a S^3 ed è un gruppo di Lie (non commutativo).

Definizione. (a) Due punti p, q di uno spazio topologico X sono *connessi per archi* se esiste un cammino $\gamma : [0,1] \to X$ continuo tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. La connessione per archi è una relazione di equivalenza, le cui classi si chiamano *componenti connesse per archi.*
(b) Due punti $p, q \in X$ sono *sconnessi* se esistono due aperti $U, V \subset X$ tali che $U \cap V = X$, $U \cap V = \emptyset$, $p \in U$ e $q \in V$. La connessione è una relazione di equivalenza, le cui classi di dicono *componenti connesse.*

Osservazione. Uno spazio connesso per archi è sempre connesso. Una varietà differenziabile (o topologica) connessa è connessa per archi (perché è localmente connessa per archi). Quindi, connessione e connessione per archi saranno equivalenti per la maggior parte degli spazi che ci interesseranno.

Esempio. Il gruppo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ non è connesso. Infatti, def : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ è continuo e quindi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_+) \cup \det^{-1}(\mathbb{R}_-)$. Lo stesso argomento vale per $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Esercizio (semplice). Dimostrare che $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ constano esattamente di due componenti connesse, mentre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ e $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$ sono connessi.

Proposizione. Sia G un gruppo topologico e sia G_0 la componente connessa per archi di G che contiene l'identità. Allora G_0 è un sottogruppo normale. Quindi l'insieme G/G_0, che si identifica con l'insieme delle componenti connesse di G, è un gruppo.

Dimostrazione. Sia $g \in G_0$. Allora esiste un cammino $\gamma : [0,1] \to G_0$ continuo tale che $\gamma(0) = e$ e $\gamma(1) = g$. Per ogni $h \in G$, consideriamo il cammino $\beta := h\gamma h^{-1} : [0,1] \to G$. Chiaramente β è continuo e $\beta(0) = heh^{-1} = e$, quindi $\beta(t) \in G_0$ per ogni $t \in [0,1]$. Concludiamo osservando che $hgh^{-1} = \beta(1) \in G_0$ e quindi $hgh^{-1} \in G_0$ per ogni $g \in G_0$ e $h \in G$. Dunque G_0 è normale. $\square$