Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/2009
Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)
Prova scritta del 16 Giugno 2009

Esercizio 1.

Una borsa di studio viene attribuita nel modo seguente. Ogni membro di una commissione di tre persone mette in ordine i candidati secondo la sua valutazione. La borsa viene attribuita al candidato (se esiste) che risulta primo in almeno due liste. Al concorso per la borsa partecipano tre studenti, Aldo, Beatrice e Carlo. La commissione è formata da tre professori totalmente incompetenti che decidono a caso (ognuno indipendentemente) l'ordine dei tre.

a) Calcolare la probabilità che Aldo riceva la borsa.

b) Calcolare la probabilità che la borsa venga attribuita.

Successivamente gli stessi tre studenti partecipano al concorso per un'altra borsa. Questa volta i tre professori che compongono la commissione, oltre che incompetenti sono pigri. Quindi ognuno dei tre (indipendentemente dagli altri) sceglie a caso uno dei tre colleghi in commissione per il precedente concorso e copia la classifica da lui stilata.

c) Calcolare la probabilità che Aldo riceva la seconda borsa, sapendo che ha ricevuto la prima.

d) Calcolare la probabilità che la borsa venga attribuita in entrambi i concorsi, ma a persone diverse.

Esercizio 2.

Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono 4. Sia X il numero di assi e Y il numero di re che si trovano fra le carte estratte.

a) Calcolare $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbf{V}ar(X)$

b) Calcolare $\mathbb{E}(\frac{X}{X+Y}\,|X>0, Y>0)$

c) Calcolare $\mathbb{E}(X|Y=k)$ al variare di k.

d) Calcolare $\mathbf{C}ov(X,Y)$ (per esempio utilizzando il risultato del punto **c)**).

Esercizio 3.

Due amici, Marilena e Nicola vanno a pesca ogni domenica. Marilena cattura un pesce con probabilità $\frac{1}{3}$ e Nicola con probabilità $\frac{1}{5}$.

a) Calcolare il valore atteso del numero di domeniche T che sono necessarie prima che almeno uno dei due peschi qualcosa.

b) Nella prima domenica fortunata con quale probabilità solo Marilena prende un pesce? Solo Nicola? Entrambi?

c) Trovare la distribuzione di probabilità del numero di domeniche S che sono necessarie affinchè i due amici abbiano catturato almeno un pesce a testa?

d) Calcolare il valore atteso del numero di domeniche che sono state necessarie sino alla prima pesca sapendo che è stato Nicola ad effettuarla.

Esercizio 4.

Un tassista fa la spola fra l'aereoporto A e due hotel B e C con le seguenti regole. Se si trova all'aereoporto va in uno dei due hotel con uguale probabilità. Se si trova in uno degli hotel va all'aereoporto con probabilità $\frac{3}{4}$ e all'altro con probabilità $\frac{1}{4}$.

a) Scrivere la matrice di transizione della catena che rappresenta la posizione dell'autista.

Supponiamo che il tassista si trovi all'aereoporto al tempo 0.

b) Per ciascuno dei tre luoghi calcolare la probabilità che il tassista vi si trovi al tempo 2.

c) Calcolare la probabilità che si trovi in B al tempo 3.

d) Trovare la distribuzione invariante π della catena.