Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09
Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)
Soluzioni della prova scritta del 14-7-2009

Esercizio 1.

a)

$$\mathbf{P}(1^a B \,|\, 2^a R) = \frac{\mathbf{P}(BR)}{\mathbf{P}(BR) + \mathbf{P}(RR)} = \frac{\frac{4}{9}\frac{5}{10}}{\frac{4}{9}\frac{5}{10} + \frac{5}{9}\frac{6}{10}} = \frac{2}{5}$$

b)

$$\mathbf{P}(\text{le } k \text{ palle estratte sono tutte rosse}) = \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{k+4}{k+8}$$

c) Sia A l'evento $\{$*le prime due estrazioni danno colori diversi*$\}$ e I_A la sua variabile indicatrice. Allora I_A è di Bernoulli di parametro $p = \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(BR) + \mathbf{P}(RB) = \frac{4}{9}$. Inoltre $X = 1 + I_A$. Quindi

$$\mathbb{E}(X) = 1 + \mathbb{E}(I_A) = 1 + p = \frac{13}{9} \quad \mathbf{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbf{V}\mathrm{ar}(I_A) = p(1-p) = \frac{20}{81}$$

Esercizio 2.

a)

$$\mathbf{P}(Y = 4 \,|\, X = 10) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

b) La distribuzione di Y dato $\{X = n\}$ è binomiale di parametri n e $1/2$, ovvero

$$\mathbf{P}(Y = k \,|\, X = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y = k \,|\, X = n)\mathbf{P}(X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{k} \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{(n-k)} = e^{-\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{k} \frac{1}{k!}$$

Quindi Y ha distribuzione di Poisson di parametro $\lambda/2$.

c)

$$\mathbb{E}(X) = \lambda;\ \mathbf{V}\mathrm{ar}(X) = \lambda$$
$$\mathbb{E}(Y \mid X) = \frac{X}{2};\ \mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda}{2};\ \mathbf{V}\mathrm{ar}(Y) = \lambda/2$$

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY \mid X)) = \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y \mid X)) = \mathbb{E}(X^2/2) = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda)$$

$$\mathbf{C}\mathrm{ov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \lambda/2$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{C}\mathrm{ov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbf{V}\mathrm{ar}(X)\mathbf{V}\mathrm{ar}(Y)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 3.
Siano $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{10}$ i risultati dei dieci lanci.

a)

$$\mathbf{P}(X \leq 3) = \mathbf{P}(Z_1 \leq 3, \ldots, Z_{10} \leq 3) = \mathbf{P}(Z_1 \leq 3)^{10} = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

b)

$$\mathbf{P}(X = 3) = \mathbf{P}(X \leq 3) - \mathbf{P}(X \leq 2) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10} - \left(\frac{1}{6}\right)^{10}$$

c) $X = \max(Y, Z_{10})$.

$$X = \begin{cases} Y & \text{se } Z_{10} \leq Y \\ Z_{10} & \text{se } Z_{10} > Y \end{cases}$$

Quindi

$$\mathbf{P}(X = k \mid Y = 6) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{se } k \geq 7 \\ \frac{1}{2} & \text{se } k = 6 \\ 0 & \text{se } k \leq 5 \end{cases}$$

d)

$$\mathbf{P}(A) = \left(\frac{1}{12}\right)^9; \quad \mathbf{P}(X \leq 3) = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$
$$\mathbf{P}(A \cap X \leq 3) = 3\left(\frac{1}{12}\right)^{10} > \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(X \leq 3)$$

Quindi gli eventi A e $\{X \leq 3\}$ sono positivamente correlati.

e)

$$\mathbf{P}(A) = \left(\frac{1}{12}\right)^9; \quad \mathbf{P}(X \leq k) = \left(\frac{k}{12}\right)^{10}$$
$$\mathbf{P}(A \cap X \leq 3) = k\left(\frac{1}{12}\right)^{10} \begin{cases} > \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(X \leq 3) & \text{se } k < 12 \\ = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(X \leq 3) & \text{se } k = 12 \end{cases}$$

Quindi gli eventi A e $\{X \leq 3\}$ sono positivamente correlati, tranne che per $k = 12$ (indipendenti).

.

Esercizio 4.

a) Dai dati forniti e ricordando che la matrice cercata $\mathbf{P}$ deve essere stocastica, si trova

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

b) Ricordando che $\mathbf{P}(X_0 = B) = 1$, troviamo

$$\mathbf{P}(X_2 = A) = p_{B\,A}p_{A\,A} + p_{B\,B}p_{B\,A} = \frac{3}{25}$$
$$\mathbf{P}(X_2 = B) = p_{B\,A}p_{A\,B} + p_{B\,B}^2 + p_{B\,C}p_{C\,B} = \frac{23}{50}$$
$$\mathbf{P}(X_2 = C) = p_{B\,C}p_{C\,C} + p_{B\,B}p_{B\,C} = \frac{21}{50}$$

c)

$$\mathbf{P}(X_3 = B) = \mathbf{P}(X_2 = A)p_{A\,B} + \mathbf{P}(X_2 = B) + p_{B\,B}\mathbf{P}(X_2 = C) + p_{C\,B} = \frac{23}{50}$$

$$\mathbf{P}(X_2 = B \,|\, X_3 = B) = \frac{\mathbf{P}(X_3 = B \,|\, X_2 = B)\mathbf{P}(X_2 = B)}{\mathbf{P}(X_3 = B)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{23}{50}}{\frac{51}{125}} = \frac{23}{34}$$

d) Si deve risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}x + \frac{1}{10}y \\ y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{1}{5}z \\ z = \frac{3}{10}y + \frac{4}{5}z \end{cases}$$

Con la condizione $x + y + z = 1$

La soluzione è $x = \frac{1}{11}; y = \frac{4}{11}; z = \frac{6}{11}$.