SOLUZIONI GIUGNO

Esercizio 1.

a) La probabilità che Aldo vinca la borsa è di tipo binomiale. In ciascuna delle tre liste Aldo ha probabilità $p = 1/3$ di figurare primo. Quindi

$$\mathbf{P}(\text{Aldo riceve la borsa}) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{7}{27}$$

b) La borsa è assegnata se e solo se è vinta da Aldo, oppure da Beatrice, oppure da Carlo. I tre eventi sono disgiunti ed equiprobabili. Pertanto

$$\mathbf{P}(\text{la borsa viene assegnata}) = 3\mathbf{P}(\text{Aldo riceve la borsa}) = \frac{7}{9}$$

Che si poteva ottenere anche come

$$\mathbf{P}(\text{la borsa viene assegnata}) = 1-\mathbf{P}(\text{la borsa non viene assegnata}) = 1-\frac{3!}{3^3}$$

in quanto 3^3 sono tutte le possibili terne di di candidati posti in cima alla propria lista dai tre membri della commissione, e 3! sono le terne di tre nomi diversi, che corrspondono alle uniche combinazioni in cui la borsa non viene assegnata.

c) Chiamiamo
$A_1 = \{\text{Aldo vince la prima borsa}\}$
$A_2 = \{\text{Aldo vince la seconda borsa}\}$
$B = \{\text{Aldo vince la prima borsa a maggioranza}\}$
$C = \{\text{Aldo vince la prima borsa all'unanimità}\}$
Naturalmente $A_1 = B \cup C$

$$\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{\mathbf{P}(A_2 \cap A_1)}{\mathbf{P}(A_1)}$$
$$\mathbf{P}(A_2 \cap A_1) = \mathbf{P}(A_2 \cap B) + \mathbf{P}(A_2 \cap C)$$
$$\mathbf{P}(A_2 \cap B) = \mathbf{P}(A_2|B)\mathbf{P}(B); \qquad \mathbf{P}(A_2 \cap C) = \mathbf{P}(A_2|C)\mathbf{P}(C)$$

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{7}{27}; \quad \mathbf{P}(B) = \frac{2}{9}; \quad \mathbf{P}(C) = \frac{1}{27}$$
$$\mathbf{P}(A_2|B) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{20}{27}$$
$$\mathbf{P}(A_2|C) = 1$$

e quindi

$$\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{\frac{20}{27}\cdot\frac{2}{9} + 1\cdot\frac{1}{27}}{\frac{7}{27}} = \frac{7}{9}$$

d) La probabilità che la borsa sia stata effettivamente attribuita, ma non all'unanimità è di $\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$.

Consideriamo ora il professore che nella prima commissione era in minoranza. La persona da lui a suo tempo scelta vincerà la seconda borsa se almeno due dei nuovi commissari copieranno tale professore.

Si tratta di nuovo di una probabilità binomiale. Il professore ha probabilità $p = 1/3$ di essere copiato da ciascun nuovo commissario. Quindi

$$\mathbf{P}(\text{nuovo vincitore}) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{7}{27}$$

In conclusione

$\mathbf{P}(\text{la borsa viene attribuita, ma a persone diverse}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{27} = \frac{14}{81}$

Esercizio 2.

a) Si può scrivere

$$X = \sum_{i=1}^{4} X_i$$

dove X_i è la variabile indicatrice dell'evento $\{$*la i-esima carta è un asso*$\}$. Allora

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4}\mathbb{E}(X_i) = 4\mathbb{E}(X_i) = 4\cdot\frac{1}{10} = \frac{2}{5}\ .$$

SI NOTI CHE IL CALCOLO APPENA EFFETTUATO VALE SIA NEL CASO DI ESTRAZIONI SENZA REINSERIMENTO, SIA NEL CASO DI ESTRAZIONI CON REINSERIMENTO.

Per quanto riguarda la varanza invece bisogna distinguere tra i due casi.

Se c'è reinserimento, la varabile X e' binomiale di parametri $N = 4$ e $p = 1/10$. La varianza e' dunque

$$\mathbf{V}ar(X) = Np(1-p) = \frac{9}{25} = 0.36 \ .$$

Se non c'e' reinserimento X ha distribuzione ipergeometrica, di parametri N, p, e $M = 40$, e dunque nuovamente di varianza nota

$$\mathbf{V}ar(X) = Np(1-p)\left(1 - \frac{N-1}{M-1}\right) = \frac{9}{25}\frac{36}{39} = \frac{108}{325} \simeq 0.33 \ .$$

Naturalmente attesa e varianza di Y sono uguali a quelle di X.

b) Basta osservare che

$$\mathbb{E}\left(\frac{X+Y}{X+Y}|X>0, Y>0\right) = 1 = \\ \mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}|X>0, Y>0\right) + \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+Y}|X>0, Y>0\right)$$

e che per simmetria

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}|X>0, Y>0\right) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+Y}|X>0, Y>0\right)$$

e quindi

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}|X>0, Y>0\right) = \frac{1}{2} \ .$$

c) I valori che k può assumere sono 0, 1, 2, 3, 4. Se ad esempio sono stati estratti ESATTAMENTE due re ($k = 2$), vuol dire che le altre due carte posso essere estratte tra le 38 rimaste con l'esclusione degli altri due re, che non posso essere estratti altrimente si arriverebbe all'estrazione di oltre due re, contrariamente all'ipotesi $k = 2$. Più in generale, avendo

estratto k re, delle altre $4-k$ carte estratte ciascuna può essere un asso con probabilità 4/36=1/9. Quindi per la linearità già usata al punto precedente

$$\mathbb{E}(X|Y=k) = (4-k)\frac{1}{9} \ , \ k = 0,1,2,3,4 \ .$$

Questo implica per definizione che

$$\mathbb{E}(X|Y) = \frac{1}{9}(4-Y) \ .$$

Anche in questo caso il risultato vale sia con che senza reiserimento.

d) Per definizione

$$\mathbf{C}ov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

Sappiamo che

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}(X|Y)] = \frac{4}{9}\mathbb{E}(Y) - \frac{1}{9}\mathbb{E}(Y^2) \ .$$

Dunque

$$\mathbf{C}ov(X,Y) = \frac{4}{9}\mathbb{E}(Y) - \frac{10}{9}\mathbb{E}(Y^2) \ ,$$

e il calcolo e' stato ridotto a grandezze precedentemente calcolate:

$$\mathbf{C}ov(X,Y) = \frac{8}{45} - \frac{10}{9}\mathbb{E}(Y^2) \ ,$$

poichè

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbf{V}ar(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2 \ .$$

La procedura vale sia con che senza reinserimento, ma il risultato numerico cambia nei due casi. Se c'è reinserimento si ottiene

$$\mathbf{C}ov(X,Y) = -\frac{2}{5} = -0.4 \ ,$$

senza reinserimento vale

$$\mathbf{C}ov(X,Y) = -\frac{3084}{8775} \simeq -0.35 \ .$$

Esercizio 3.
Soluzione

a) In una data domenica la probabilità di non pescare nulla è $(2/3)\cdot(4/5)$, il cui complemento a uno fornisce la probabilità di pescare qualcosa in una data domenica:

$$P(\text{almeno uno dei due pesca qualcosa}) = 1 - \frac{2}{3}\frac{4}{5} = \frac{7}{15}\ .$$

Sia N il numero di domeniche necessarie affinche si peschi per la prima volta qualcosa. Chiaramente N assume il valore n con probabilità

$$P(N=n) = \left(\frac{8}{15}\right)^{n-1}\frac{7}{15}\ ,\ n=1,2,\ldots$$

Pertanto

$$\mathbb{E}(N) = \frac{7}{15}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{8}{15}\right)^{n-1} = \frac{15}{7}\ .$$

b) La condizione è che la domenica sia fortunata, il che avviene con probabilita' 7/15. Si ha

$$P(\text{Marilena}) = \frac{\frac{1}{3}\frac{4}{5}}{\frac{7}{15}} = \frac{4}{7}\ ,\ P(\text{Nicola}) = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{5}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7}\ ,$$

$$P(\text{entrambi}) = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{5}}{\frac{7}{15}} = \frac{1}{7}\ .$$

c) Sia T il numero di domeniche necessarie a Marilena per pescare qualcosa e U il numero di domeniche necessario a Nicola.
Abbiamo $S = \max(T,U)$. E quindi

$$\mathbf{P}(S\le k) = \mathbf{P}(T\le k)\mathbf{P}(U\le k) = \frac{8}{15}\left(\frac{1}{15}\right)^{k-1}$$

d) Iniziamo calcolando la probabilità che la prima pesca sia stata effettuata da Nicola, ovvero $\mathbf{P}(U<T)$.

$$\mathbf{P}(U<T) = \sum_k \mathbf{P}(U<T\,|\,T=k)\mathbf{P}(T=k) = \sum_{k=2}^{\infty}\mathbf{P}(U<k)\mathbf{P}(T=k) =$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\right]\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} - \frac{8}{45}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{8}{15}\right)^{k} = \frac{2}{7}$$

Poi calcoliamo $\mathbf{P}(T = k \,|\, U < T)$

$$\mathbf{P}(U = k \cap T < U) = \mathbf{P}(U = k \cap T > k) = \mathbf{P}(U = k)\mathbf{P}(T > k) =$$
$$= \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{15}\right)^{k}$$

quindi

$$\mathbf{P}(U = k \,|\, U < T) = \frac{\mathbf{P}(U = k \cap T < U)}{\mathbf{P}(U < T)} = \frac{7}{8}\left(\frac{8}{15}\right)^{k}.$$

Finalmente

$$\mathbb{E}(U \,|\, U < T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(U = k \,|\, U < T) = \frac{7}{8}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{8}{15}\right)^{k} = \frac{15}{8}.$$

Esercizio 4.
Soluzione

a) Sia π tale matrice. Dai dati forniti si trova

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{P}(X_2 = A) = p_{A\,B}p_{B\,A} + p_{A\,C}p_{C\,A} = \frac{3}{4}$$
$$\mathbf{P}(X_2 = B) = \mathbf{P}(X_2 = C) = \frac{1}{2}(1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{8}$$

c)

$$\mathbf{P}(X_3 = B) = \mathbf{P}(X_2 = A)p_{A\,B} + \mathbf{P}(X_2 = C)p_{C\,B}\frac{13}{32}$$

d) Si deve risolvere il problema lineare

$$(x,\ y,\ z)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} = (x,\ y,\ z)$$

La soluzione e' $(3/7, 2/7, 2/7)$.