Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/2009
Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)
1^a Prova in Itinere - 27 Aprile 2009
Soluzioni

Esercizio 1. Sia X il numero di volte che si presenta il numero 3.

a)

$$\mathbf{P}(X \leq 6) = \sum_{k=0}^{6} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{12-k} .$$

b)

$$\mathbf{P}(X \leq 6 \,|X \geq 3) = \frac{\mathbf{P}(X \leq 6 \cap X \geq 3)}{\mathbf{P}(X \geq 3)} = \frac{\mathbf{P}(3 \leq X \leq 6)}{\mathbf{P}(X \geq 3)} = \frac{\sum_{k=3}^{6} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{12-k}}{\sum_{k=3}^{12} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{12-k}} .$$

c) Sia Y il numero di volte che si presenta un numero dispari. Dalla definizione

$$\mathbb{P}(X \leq 6|Y \geq 7) = \frac{\mathbb{P}(X \leq 6 \cap Y \geq 7)}{\mathbb{P}(Y \geq 7)} .$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 6 \cap Y \geq 7) &= \sum_{k=7}^{12} \mathbb{P}(X \leq 6 \cap Y = k) \\ &= \sum_{k=7}^{12} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{12-k} \left[\sum_{j=0}^{6} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(\frac{2}{3}\right)^{k-j}\right] ,\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Y \geq 7) = \sum_{k=7}^{12} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{12-k} ,$$

quindi

$$\mathbb{P}(X \leq 6|Y \geq 7) = \frac{\sum_{k=7}^{12} \binom{12}{k} \sum_{j=0}^{6} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(\frac{2}{3}\right)^{k-j}}{\sum_{k=7}^{12} \binom{12}{k}}$$

Esercizio 2.

0) I numeri di sei cifre 121212 e 094816 sono equiprobabili.

a) $\mathbf{P}(\text{cifra scelta a caso non è } 6) = \frac{9}{10}$. Quindi

$$\mathbf{P}(\text{il numero non contiene il } 6) = \left(\frac{9}{10}\right)^6 .$$

b) $\mathbf{P}(\text{cifra scelta a caso è pari}) = \frac{1}{2}$. Quindi

$$\mathbf{P}(\text{il numero contiene solo cifre pari}) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 .$$

c) Le sequenze cercate sono del tipo $ab2345$, $a2345b$, $2345ab$. Per a e b abbiamo 10 scelte. In tutto quindi ci sono 300 sequenze che contengono 2345 e

$$\mathbf{P}(\text{il numero contiene la stringa } 2345) = \frac{300}{10^6} .$$

d) L'insieme delle stringhe che contengono la sequenza 2222 può essere scritto come unione disgiunta di tre insiemi:

- l'insieme delle stringhe che contengono la sequenza 2222, ma non la sequenza 22222;
- l'insieme delle stringhe che contengono la sequenza 22222, ma non la sequenza 222222;
- l'insieme costituito dalla sequenza 222222.

Il primo insieme contiene le stringhe della forma $ab2222$ e $2222ba$, dove a può essere scelto liberamente e b deve essere diverso da 2 (10 scelte per a e 9 per b). Contiene inoltre le stringhe della forma $x2222y$ dove sia x che y devono essere diversi da 2. Ha pertanto 90+90+81=261 elementi.

Il secondo insieme contiene le stringhe della forma $a22222$ e $22222a$, dove a deve essere diverso da 2 e conta pertanto 18 elementi.

Il terzo insieme ha un solo elemento.

Pertanto l'insieme delle stringhe che contengono la sequenza 2222 ha cardinalità 280 e

$$\mathbf{P}(\text{il numero contiene la stringa } 2222) = \frac{280}{10^6} \ .$$

Esercizio 3.

a) Si tratta della probabilità ipergeometrica data da

$$\frac{\binom{80}{8}\binom{120}{12}}{\binom{200}{20}} \ .$$

b1) Deve risultare $c = \frac{1}{100}$ e quindi

$$P\{30 \leq X \leq 90\} = P\{50 \leq X \leq 90\} = \frac{41}{100} \ .$$

b2) Indicando con X il numero (aleatorio) di elettori per lo schieramento A, consideriamo la partizione costituita dagli eventi

$$B_x = (X = x), 51 \leq k \leq 150 \ .$$

La probabilità cercata si ottiene applicando la *formula delle probabilità totali:*

$$P(E) = \sum_{x=51}^{150} P\left(B_k\right) P(E|B_k) \ ,$$

dove

$$P(E|B_x) = \frac{\binom{x}{8}\binom{200-x}{12}}{\binom{200}{20}} \ .$$

Quindi

$$P(E) = \frac{1}{100} \sum_{x=51}^{150} \frac{\binom{x}{8}\binom{200-x}{12}}{\binom{200}{20}} \ .$$

Esercizio 4. Essendo

$$P(A^c) = 1 - P(A)\,, P(B^c) = 1 - P(B)\,,$$

la condizione di indipendenza fra A^c e B^c è equivalente a

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)\,.$$

Per la regola di De Morgan, d'altra parte,

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c\,,$$

da cui

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) =$$
$$1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)\,.$$

Quindi la condizione di indipendenza fra A^c e B^c è equivalente a

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\,,$$

cioè all'indipendenza fra A e B. Analogamente si mostra che l'indipendenza fra A e B è equivalente all'indipendenza fra A^c e B^c.