**Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09**
**Calcolo delle Probabilità I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)**
**Foglio Esercizi di Verifica**
**consegnato l'8 aprile 2009**
Soluzione degli esercizi

**Esercizio 1**

Senza perdita di generalità supponiamo che gli interi distinti consecutivi siano $1, 2, \ldots, n$. Per prima cosa contiamo le configurazioni che soddisfano le condizioni del problema.

Una configurazioni di cinque interi consecutivi può iniziare con qualunque intero $1 \leq k \leq n-4$. Gli altri sono poi determinati univocamente.

Invece, se prima c'è il gruppo di tre numeri consecutivi e inizia in posizione $k$, allora quello di due può iniziare in $n-k-4$ posizioni ($1 \leq k \leq n-5$). Quindi il numero di successioni che presentano per primo il gruppo di tre è

$$\sum_{k=1}^{n-5} n-k-4 = \sum_{j=1}^{n-5} j = \frac{1}{2}(n-5)(n-4)$$

Quelle che che presentano per primo il gruppo di due sono altrettante, per un totale di $(n-5)(n-4)$

Ci sono $n^5$ modi di scegliere cinque numeri, effettuando estrazioni con reinserimento e $\binom{n}{5}$ effettuando un'estrazione in blocco.

**a)** La sequenza di cinque numeri può essere ascendente o discendente e quindi la probabilità cercata è $\frac{2(n-4)}{n^5}$.

**b)** Sia la sequenza di tre che quella di due possono essere ognuna ascendente o discendente, quindi la probabilità cercata è $\frac{4(n-4)(n-5)}{n^5}$.

**c)** Come abbiamo visto nella premessa, ci sono $(n-4)$ modi per scegliere 5 palle e ordinarle in modo che formino una sequenza di cinque numeri consecutivi. La probabilità cercata è pertanto $\frac{(n-4)}{\binom{n}{5}}$.

**d)** Come abbiamo visto nella premessa, ci sono $(n-5)(n-4)$ modi per scegliere 5 palle e ordinarle in modo che formino una sequenza di tre e una di due, non consecutive. La probabilità cercata è pertanto $\frac{(n-5)(n-4)}{\binom{n}{5}}$.

**Esercizio 2.** Dalla condizione $A \subseteq B$ discende $A \cap B = A$ e dunque $P(A \cap B) = P(A)$. Dalla condizione di indipendenza segue $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$. Da cui otteniamo

$$P(A)\,[1 - P(B)] = 0.$$

**Esercizio 3** In una singola estrazione

$$\mathbb{P}(\text{bianca}) = \frac{1}{3}; \quad \mathbb{P}(\text{rossa}) = \frac{2}{9}; \quad \mathbb{P}(\text{nera}) = \frac{4}{9}$$

Sia $B$ il numero di palle bianche uscito in 10 estrazioni, $R$ quello di palle rosse e $N$ quello di palle nere. Naturalmente $B + R + N = 10$.

**a)**

$$\mathbb{P}(R \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{10}{k} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{7}{9}\right)^{10-k}$$

**b)**

$$\mathbb{P}(R \leq 5 | N \geq 3) = \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}(R = k | N \geq 3) = \sum_{k=0}^{5} \frac{\mathbb{P}(R = k \cap N \geq 3)}{\mathbb{P}(N \geq 3)}$$

Calcoliamo $\mathbb{P}(R = k \cap N \geq 3)$.

$$\mathbb{P}(R = k \cap N \geq 3) = \mathbb{P}(R = k \cap \{\bigcup_{j=3}^{10} N = j\}) = \mathbb{P}(\bigcup_{j=3}^{10} \{R = k \cap N = j\}) =$$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{j=3}^{10-k} \{R = k \cap N = j\}) = \sum_{j=3}^{10-k} \mathbb{P}(R = k \cap N = j) =$$

$$\sum_{j=3}^{10-k} \binom{10}{k, j, 10-k-j} \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k-j} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{4}{9}\right)^j =$$

$$\sum_{j=3}^{10-k} \binom{10-k}{j} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k-j} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{4}{9}\right)^j$$

Dove $\binom{10}{k,\, j,\, 10-k-j}$ è un coefficiente trinomiale.

**Esercizio 4**.

**a1)** Si tratta di un problema di tipo ipergeometrico, in cui la probabilità cercata è data da

$$\frac{\binom{80}{y}\binom{120}{10-y}}{\binom{200}{10}}.$$

**a2)** i valori possibili per $y$ debbono soddisfare contemporaneamente le condizioni:

$$0 \leq y \leq 80, 0 \leq 10 - y \leq 120,$$

da cui

$$0 \leq y \leq 10.$$

**b)** Indicando con $Y$ il numero (aleatorio) di elettori per lo schieramento $A$ fra quelli intervistati, consideriamo la partizione costituita dagli eventi

$$B_y = (Y = y), 0 \leq y \leq 10.$$

**b1)** Notiamo che in particolare risulta

$$H = B_0.$$

Ponendo $y = 0$, come caso particolare della probabilità ottenuta in a1), otteniamo

$$P(H) = P(B_0) = \frac{\binom{120}{10}}{\binom{200}{10}}.$$

**b2)** La probabilità cercata si ottiene applicando la *formula delle probabilità totali:*

$$P(E) = \sum_{y=0}^{10} P\left(B_y\right) P(E|B_y),$$

dove

$$P(E|B_y) = (0.4)^y \, (0.6)^{10-y}$$

e, da quanto ottenuto in a1),

$$P(B_y) = \frac{\binom{80}{y}\binom{120}{10-y}}{\binom{200}{10}}.$$

**b3)** Applicando la formula di Bayes, possiamo scrivere

$$P(H|E) = P(B_0|E) = P(B_0)P(E|B_0) = \frac{\binom{120}{10}(0.6)^{10}}{\binom{200}{10}P(E)} = \frac{\binom{120}{10}(0.6)^{10}}{\sum_{y=0}^{10}\binom{80}{y}\binom{120}{10-y}(0.4)^y(0.6)^{10-y}}$$

$$= \frac{\binom{120}{10}(0.6)^{10}}{\sum_{y=0}^{10}\binom{80}{y}\binom{120}{10-y}(0.4)^y(0.6)^{10-y}} = \frac{\binom{120}{10}}{\sum_{y=0}^{10}\binom{80}{y}\binom{120}{10-y}\left(\frac{2}{3}\right)^y}.$$