Corso di Laurea Triennale in Matematica A.A. 2008/'09
Calcolo delle Probabilita' I (docenti M. Isopi, F. Spizzichino)
Foglio Esercizi di Verifica
consegnato il 20 marzo 2009

Esercizio 1. Su un bersaglio vengono tirati *indipendentemente* tre colpi consecutivi. Le probabilità che il colpo centri il bersaglio sono, rispettivamente, p_1, p_2, p_3.

a) Calcolare la probabilità che il primo colpo abbia centrato il bersaglio condizionatamente all'informazione che il bersaglio è stato centrato da uno solo dei tre colpi

b) Calcolare la probabilità che il primo colpo abbia centrato il bersaglio condizionatamente all'informazione che il bersaglio è stato centrato in almeno uno dei tre colpi.

Esercizio 2. Un test clinico dà risultato "positivo" con probabilità 0.9 **se** è effettuato su una persona che ha contratto un certo tipo di infezione; il test dà invece risultato "positivo" con probabilità 0.15 **se** è effettuato su una persona "sana" (cioè che non ha contratto quel tipo di infezione).
Tizio si sottopone al test (una sola volta). Non è noto se Tizio sia sano o infetto e queste due diverse ipotesi alternative hanno rispettivamente probabilità del 60% e del 40%.
a) Calcolare la probabilità dell'evento

$$\boldsymbol{B = \{Tizio\ ottiene\ risultato\ \text{“}positivo\text{”}\}}.$$

b) Quanto vale la probabilità condizionata dell'ipotesi che Tizio sia sano **dato che** è stato osservato il risultato B?

Esercizio 3. Si scelgono due carte a caso, senza rimpiazzo, da un mazzo di 52 carte. Sia B l'evento che entrambe siano degli assi; sia A_P l'evento che sia stato estratto l'asso di picche, e A l'evento che sia stato estratto almeno un asso. Determinare

a) $P(B|A)$

b)$P(B|A_P)$

Esercizio 4. Un villaggio di montagna V è collegato al paese di fondo-valle (soltanto) tramite due sentieri, α e β.

Dopo una lunga nevicata, valuto uguale a 0.7 la probabilità che sia percorribile α, uguale a 0.5 la probabilità che sia percorribile β, e uguale a 0.4 la probabilità che siano percorribile entrambi.

a) Come devo valutare la probabilità dell'evento

$$\mathbf{E} \equiv \{\textit{è possibile da } V \textit{ raggiungere il fondo-valle}\}$$

b) Sapendo che è verificato l'evento **E**, come devo valutare la probabilità che siano percorribili sia α che β?

Esercizio 5. Un'urna contiene 10 palline, fra rosse e gialle. Sappiamo che 7 sono di un colore e 3 di un altro; ma non sappiamo quale sia il colore predominante e attribuiamo uguale probabilità alle due ipotesi alternative **H** e $\widetilde{\mathbf{H}}$, dove

$$\mathbf{H} \equiv \{\textit{7 palline di colore giallo e 3 di colore rosso}\}.$$

Estraiamo a caso una pallina dall'urna.

a) Qual è la probabilità di estrarre una pallina gialla?

b) Facendo una seconda estrazione casuale (senza aver rimesso la prima pallina estratta nell'urna), qual'e' la probabilità che si presenti di nuovo una pallina gialla?

Esercizio 6. Inviamo un messaggio composto da simboli *1* e *0.* In media il rapporto fra il numero degli 0 ed il numero degli 1 è uguale a $\frac{3}{4}$. Per problemi di rumore sulla linea ogni simbolo *0* ha una probabilità uguale a $\frac{1}{4}$ di essere ricevuto come *1* e, viceversa, ogni simbolo *1* ha una probabilità uguale a $\frac{1}{3}$ di essere ricevuto come *0.* Calcolare

a) la probabilità che un simbolo venga ricevuto come *1*

b) la probabilità che un simbolo ricevuto come *1* sia stato effettivamente inviato come *1.*

Esercizio 7. Siano A, B due eventi con $P(A) > 0$. Mostrare che

$$P\left(A \cap B | A\right) \geq P\left(A \cap B | A \cup B\right).$$

Esercizio 8. Un sistema ingegneristico, composto di diversi componenti, si diece essere un *parallelo* quando è capace di funzionare fintanto che funziona almeno uno dei suoi componenti.

Consideriamo ora un sistema parallelo costituito da n componenti $C_1, ..., C_n$, ciascuno dei quali, indipendentemente dagli altri, può essere funzionante o guasto con probabilità $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

a) Qual'è la probabilità che esattamente k componenti siano funzionanti

b) Se sappiamo che il sistema è funzionante, come dobbiamo valutare la probabilità che sia funzionante C_1.