Prova scritta di Algebra lineare del 22 giugno 2011

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ sono dati i cinque punti

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Determinare l'intersezione tra il piano π passante per A, B, C e la retta r passante per D, E.

Esercizio 2. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $x + y + z = 0$, sia $v_3 = (1, 1, 1)$ e sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sui vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ da

$$\varphi(e_1) = e_2; \qquad \varphi(e_2) = e_3; \qquad \varphi(e_3) = e_1.$$

(1) determinare due vettori $v_1, v_2 \in V$ tali che v_1, v_2, v_3 sia una base di $\mathbb{R}^3$,
(2) scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione lineare φ rispetto alla base v_1, v_2, v_3 (presa sia come base di partenza che di arrivo),
(3) determinare una base di V,
(4) dimostrare che $\varphi(V) \subseteq V$ e calcolare il determinante della restrizione $\varphi_{|V} : V \to V$.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A;
(2) per ogni autovalore, determinare la dimensione ed una base del rispettivo autospazio.
(3) dire se A è diagonalizzabile sui campi $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.
(4) determinare il polinomio minimo di A.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $v \in V$ un vettore non nullo. Sia $A \subseteq \mathrm{End}(V) = \mathcal{L}(V, V)$ il sottoinsieme delle applicazioni lineari $\varphi : V \to V$ definito da

$$\varphi \in A \quad \text{se e solo se } v \text{ è un autovettore di } \varphi$$

(1) dimostrare che A è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$;
(2) determinare la dimensione di A.