4 giugno 2008

Indice

1 INTRODUZIONE SU CATEGORIE E FUNTORI (è solo l'inizio...)

In matematica una categoria C e' una struttura dotata di due componenti (oggetti e morfismi) che soddisfa alcune proprieta'.
Precisamente una categoria e' data da:

1. Una collezione di elementi detti oggetti della categoria,
2. Un insieme MorC(X, Y), dove X, Y e' una qualsiasi coppia di oggetti di C,
i cui elementi sono detti morfismi tra X e Y
(se f $\in MorC(X, Y)$ allora si scrive f : X $\rightarrow$ Y).

Inoltre dati X, Y , Z, $\in$ C deve valere la legge di composizione
MorC(X, Y) x MorC(Y , Z) $\rightarrow$ MorC(X, Z)
(f , g)$\rightarrow f \cdot g$

Bisogna poi che esista per ogni oggetto X un morfismo 1x $\in$ MorC(X, Y) che agisca come l'identita' sui morfismi.
Infine la composizione dei morfismi deve essere associativa, ovvero, dato f $\in$ MorC(X, Y), g $\in$ MorC(Y , Z), h $\in$ MorC(Z, W), si ha h(g $\cdot$ f) = (h $\cdot$ g)f.

Esempi

1. In Algebra, i gruppi (visti come oggetti) formano una categoria insieme agli omomorfismi di gruppi.

2. Nel contesto della Topologia si considera la categoria Top che
ha come oggetti spazi topologici e come morfismi le funzioni continue

L'introduzione del concetto di categorie permette di fare ordine nelle strutture di cui si viene a trattare, in particolare per evitare confusione e paradossi.

Funtori

In alcuni casi e' utile poter passare da un contesto ad un altro, ovvero da una categoria a un altra, mediante applicazioni che prendono il nome di funtori. In particolare, date due categorie C1, C2, un funtore F : C 1 $\rightarrow$ C 2 consiste di due applicazioni, una tra gli oggetti e una tra i morfismi (da C1 a C2) cioe':

ad ogni oggetto x ∈ C 1, F associa un oggetto $F(x)$ ∈ C2;
ad ogni morfismo f : x → y sugli oggetti in C1
F associa un morfismo F (f) : F (x) → F (y)
sugli oggetti in C2 e devono valere le seguenti condizioni:

1)F (1x) = 1Fx (all'identita di C1 viene associata l'identita' in C2)
2)F (f ◦ g) = F (f) ◦ F (g) (legge sulle composizioni).

E' anche possibile definire una categoria che ha per oggetti
i funtori tra categorie e per morfismi i morfismi tra funtori.

$$\begin{tikzcd} inC_1 & X \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, "\rightsquigarrow^{F}"] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] & inC_2 \\ & Y & F(Y) & \end{tikzcd}$$

2 SPAZI GENERALIZZATI E LEMMA DI YONEDA (famose der male...)

COSTRUZIONE DI $\hat{C}$ E DEI FUNTORI h E h_X^{op}

Sia C una categoria, e Set la categoria degli insiemi.
Definiamo $\hat{\mathcal{C}} \doteq \{F : C^{op} \to Set, F funtore\}$.
$\hat{\mathcal{C}}$ e' una categoria di funtori: ha per oggetti i funtori e per morfismi i morfismi di funtori (i morfismi di funtori sono chiamati anche trasformazioni naturali). Il motivo per cui sono stati scelti i morfimi da C^{op} invece che da C tenteremo di chiarirlo in seguito. Una piccola nota sulla nomencaltura: l'immagine di un morfismo f attraverso un funtore viene chiamta f_* (asterisco in basso!) se il verso del morfismo è preservato, f^* (asterisco in alto!) se il verso del morfismo è invertito.

Adesso vogliamo confrontare la vecchia categoria C con la nuova categoria $\hat{\mathcal{C}}$ costruendo un funtore che, come vedremo, immerge la vecchia categoria nella nuova.

Definiamo il funtore: $h : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$.
Dobbiamo dire come agisce h sia sugli oggetti che sui morfismi.

A livello degli oggetti il funtore h associa ad ogni $X \in C$ il funtore h_X^{op}, che è un oggetto della categoria $\hat{C}$ ed è definito nel modo seguente:
$h_X^{op} : C^{op} \to Set$.
Per gli oggetti: $h_X^{op}(Y) = Hom(Y, X)$.
Per quanto riguarda i morfismi, sia $f \in Hom(Y, Z)$, devo definire $h_X^{op}(f) = f^* \in Hom(h_X^{op}(Z), h_X^{op}(Y))$.
$\forall \varphi \in h_X^{op}(Z) = Hom(Z, X)$ pongo $f^*(\varphi) = f \circ \varphi \in Hom(Y, X) = h_X^{op}(Y)$.
Adesso che abbiamo definito h_X^{op} dobbiamo verificare che sia effettivamente un funtore, ovvero che rispetta la composizione dei morfismi e manda l'identità nellídentità, quindi dobbiamo dimostrare che presi comunque Y,W e Z tra gi oggetti di C, e prese comunque $f \in Hom(Y, W)$ e $\in Hom(W, Z)$, si ha che: $h_X^{op}(f \circ g) = h_X^{op}(g) \circ h_X^{op}(f)$ e che presa $1_Y \in Hom(Y, Y)$ si ha che $h_X^{op}(1_Y) = 1_{h_X^{op}(Y)}$. Per dimostrare queste uguaglianze innanzitutto chiariamoci chi sono dominio e codominio:
$h_X^{op}(f \circ g) : h_X^{op}(Z) \longrightarrow h_X^{op}(Y)$
$h_X^{op}(g) \circ h_X^{op}(f) : h_X^{op}(Z) \longrightarrow^{h_X^{op}(g)} h_X^{op}(W) \longrightarrow^{h_X^{op}(f)} h_X^{op}(Y)$ Ora per la prima calcoliamo le due funzioni su un elemento generico del dominio e verifichiamo che danno lo stesso risultato (anche per le uguaglianze che dovremo dimostrare in futuro adotteremo la stessa strategia):
Sia $\varphi \in h_X^{op}(Z) = Hom(X, Z)$, $h_X^{op}(g) \circ h_X^{op}(f)(\varphi) = h_X^{op}(f)(h_X^{op}(g)(\varphi)) = h_X^{op}(f)(g \circ \varphi) = f \circ g \circ \varphi = h_X^{op}(f \circ g)(\varphi)$
Per lídentità: $h_X^{op}(1_Y)(\varphi) = 1_Y \circ \varphi = \varphi$

Ora torniamo al funtore h, dobbiamo definirlo sui morfismi, ovvero data $f \in Hom(X, Y)$ devo definire $h(f) = f_* \in Hom(h(X), h(Y)) = Hom(h_X^{op}, h_Y^{op})$.
Ricordiamo che f_* deve essere un morfismo di funtori: per definizione dare un morfismo di funtori f_* significa dare per ogni Z oggetto di C un morfismo $\gamma_Z^f \in Hom(h_X^{op}, h_Y^{op})$ che verifichi le proprieta opportune. Ed ecco, nel nostro caso, la sua definizione:

Data $f \in Hom(X, Y)$ definisco per ogni Z in C $\gamma_Z^f : Hom(Z, X) = h_X^{op}(Z) \to Hom(Z, Y) = h_Y^{op}(Z)$ cosi: $\gamma_Z^f(\varphi) = \varphi \circ f$. Ora dobbiamo verificare che f_* sia effettivamente un morfismo di funtori, ovvero presi comunque h_X^{op} , $h_Y^{op} \in \hat{C}$ e $g \in Hom(Z, W)$ si ha che $h_X^{op}(g) \circ \gamma_Z^g = \gamma_W^g \circ h_Y^{op}(g)$. Come prima iniziamo ricordando chi sono dominio e codominio:
$h_X^{op}(g) \circ \gamma_Z^g : h_X^{op}(W) \longrightarrow^{h_X^{op}(g)} h_X^{op}(Z) \longrightarrow^{\gamma_Z^g} h_Y^{op}(Z)$
$\gamma_W^g \circ h_Y^{op}(g) : h_X^{op}(W) \longrightarrow^{\gamma_W^g} h_Y^{op}(W) \longrightarrow^{h_Y^{op}(g)} h_Y^{op}(Z)$
Ora prendiamo uno generico $\varphi \in h_X^{op}(W) = Hom(W, X)$, abbiamo che:
$h_X^{op}(g) \circ \gamma_Z^g(\varphi) = \gamma_Z^g(h_X^{op}(g)(\varphi)) = \gamma_Z^g(g \circ \varphi) = g \circ f \circ \varphi$
$\gamma_W^g \circ h_Y^{op}(g)(\varphi) = h_X^{op}(g)(\gamma_Z^g(\varphi)) = h_X^{op}(g)(\varphi \circ f) = g \circ f \circ \varphi$

" Last but not least " si deve verificare che h è un funtore, ovvero rispetta

la composizione di morfismi e lídentità.
Anche in questo caso la verifica si fa applicando, con santa pazienza, le definizioni. Per la composizione rivediamo bene quello che abbiamo e quello che dobbiamo dimostrare:
$f \in Hom(X,Y)$, $g \in Hom(Y,Z)$, $f \circ G \in Hom(X,Z)$
Dobbiamo verificare $\forall$ W tra gli oggetti di C $\gamma_W^{f \circ g} = \gamma_W^f \circ \gamma_W^g$, guardiamo dominio e codominio:
$\gamma_W^{f \circ g}$: $h_X^{op}(W) \longrightarrow h_Z^{op}(W)$
$\gamma_W^f \circ \gamma_W^g$: $h_X^{op}(W) \longrightarrow^{\gamma_W^f} h_Y^{op}(W) \longrightarrow^{\gamma_W^g} h_Z^{op}(W)$
Ora prendiamo un generico $\varphi \in h_X^{op}(W) = Hom(W,X)$ e abbiamo che:
$\gamma_W^{f \circ g}(\varphi) = \varphi \circ f \circ g$
$\gamma_W^f \circ \gamma_W^g(\varphi) = \gamma_W^g(\varphi \circ f) = \varphi \circ f \circ g$
Per lídentità: presa $1_x \in Hom(X,X)$ si ha che per ogni Z $h(1_X)(\varphi) = \gamma_Z^{1_X}(\varphi) = \varphi \circ 1_X = \varphi$

Diamo l'ultima definizione: F oggetto di $\hat{\mathcal{C}}$ si dice rappresentabile se $\exists$ X tra gli oggetti di C tale che F=h(X).

UN PUNTO DI VISTA POSSIBILE

Un modo possibile di vedere le cose dette fino ad ora è il seguente: il funtore h_X^{op} trasforma gli oggetti della nostra categoria in insiemi di funzioni verso X, possiamo scegliere di focalizzare la nostra attenzione sulle immagini di queste funzioni: possiamo pensare che h_X^{op} manda gli oggetti in copie o accartocciamenti degli stessi oggetti su X. Il vantaggio è il seguente: se X è molto semplice rispetto agli altri oggetti invece di lavorare su oggetti complicati lavoriamo con le proiezioni di questi stessi oggetti su un oggetto più semplice, se X è molto complesso invece di lavorare direttamente su X lavoro con la proiezione di oggetti più semplici su X. Il verso dei morfismi si inverte perchè se io ho un modo φ di copiare Y su X e una funzione f da Z in Y, quello che naturalmente posso ottenere è da un modo di copiare Y in X (ovvero φ) un modo di copiare Z su X (cioè $f \circ \varphi$). Gli esempi che seguono sono stati pensati seguendo questo punto di vista.

ESEMPO SUGLI SPAZI VETTORIALI

Sia C la categoria degli spazi vettoriali di dimensione finita su un campo $\mathbf{K}$, i morfismi sono le applicazioni lineari. Fisso V lo spazio più sempilce di tutti: quello di dimensione 1 (ovvero il campo $\mathbf{K}$). Prendo $h_V^{op} \in \hat{C}$, sia W uno spazio qualunque, $h_V^{op}(W) = Hom(W, \mathbf{K}) = W^*$(=W duale)! Grazie a questa costruzione invece di lavorare con vettori in dimensione n ci riduciamo a lavorare con vettori di dimensione 1, ovvero numeri. Questa costruzione inoltre preserva la struttura della categoria perciò, ad esempio, mi permette di ridurre la somma di due vettori a somma di numeri! (ritrovo che lo spazio duale non e'altro che lo spazio delle coordinate).

ESEMPIO SUI GRUPPI.
Sia C la categoria dei gruppi, i morfismi sono gli omomorfismi tra grupi. Ricordiamo che límmagine di un gruppo mediante un omomorfismo è un sottogruppo del codominio. Fisso un gruppo G. Límmagine di C attraverso il funtore h_G^{op} puo'essere pensata come il reticolo dei sottogruppi di G (con molte ripetizioni!).

SECONDO ESEMPIO SUI GRUPPI
Sia C la categoria dei gruppi, i morfismi sono gli omomorfismi tra grupi. Sia G=SO(3,$\Re$). h_G^{op} calcolato su tutti i gruppi finiti dà línsieme di tutti i poliedri platonici e tutti i poligoni regolari posizionati in tutti i modi possibili (lasciando pero'il loro centro sempre coincidente con lórigine dello spazio).

COSTRUZIONE DEL LEMMA DI YONEDA

Sia $F : \mathcal{C} \longrightarrow Set$ un funtore controvariante, e sia φ un elemento di $Nat(h_X^{op}, F)$, cioè l'insieme delle trasformazioni naturali (o morfismi tra fun tori) da h_X^{op} in F.

Dato $Y \in Ob(C)$ $\exists$:
$\varphi_Y : h_X^{op} = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X) \longrightarrow F(Y)$
e dando anche il morfismo:
$g : Z \longrightarrow Y \in Ob(C)$
vale, commutativo, il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(Y,X) \arrow[r, "\phi_Y"] \arrow[d, "h_X^{op}(g)"] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(Z,X) \arrow[r, "\phi_Z"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Ora possiamo considerare in particolare:
$\varphi_X : h_X^{op} = Hom_{\mathcal{C}}(X, X) \longrightarrow F(X)$
avendo la possibilità di definire un elemento canonico associato ad X:
$\varphi_X(1_X) \in F(X)$
$1_X = id \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$.
Applicando il precedente diagramma al morfismo:
$f : Y \longrightarrow X$, si ha:

$$\begin{tikzcd}
1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "h_X^{op}(f)"] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
h_x^{op}(1_X)(f) \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,X) \arrow[r, "\phi_Y"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Se ne può dedurre:
$\varphi_Y(f) = F(f)\varphi_X(1_X)$
Ovvero l'elemento $\varphi_X(1_X)$ determina completamente il valore di $\varphi_Y \forall Y$.
D'altro canto $\forall u_X \in F(X)$ l'applicazione:
$f \longrightarrow F(f)(u_X)$
definisce una trasformazione naturale tra h_X^{op} e F.
Abbiamo mostrato in tal modo una corrispondenza biunivoca fra $Nat(h_X^{op}, F)$ e $F(X)$, quindi è dimostrato il seguente (fondamentale) lemma:

LEMMA YONEDA

$Nat(h_X^{op}, F) \simeq F(X)$

Ora è legittimo chiedersi il come mai ci si sia imbarcati in una dimostrazione decisamente non semplice che ci porta a una conclusione apparentemente lontana dalle nostre necesità. Il motivo fondamentale che ci ha spinto a farlo è che due corollari (o semplici applicazioni) di questo lemma che a breve andremo a mostrare ci dicono che h^{op} è iniettiva e pienamente fedele, cioè che copia con precisione $\mathcal{C}$ dentro $\hat{\mathcal{C}}$.

Per rendere efficace il lemma dobbiamo quindi usarlo per mostrare che h^{op} è iniettivo e pienamente fedele:
Ricordiamo che, per definizione di categoria:
$Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Z,W) \Leftrightarrow X = ZeY = W$.
Quindi $X = Y \Leftrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X,X) = Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ ma , per il lemma di Yoneda questo è vero se e solo se:
$Nat(h_X^{op}, h_X^{op}) = Nat(h_X^{op}, h_Y^{op}) \Leftrightarrow Hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h^{op}(X), h^{op}(X)) = Hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h^{op}(X), h^{op}(Y)) \Leftrightarrow$ $h^{op}(X) = h^{op}(Y)$ per funtorialità di h^{op}, e questo dimostra l'iniettività.

Per la piena fedeltà invece vogliamo mostrare che h^{op} è una bigezione tra $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $Hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h^{op}(X), h^{op}(Y))$, ma si ha:
$Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) = h_Y^{op}(X) \simeq Nat(h_X^{op}, h_Y^{op}) = Hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h^{op}(X), h^{op}(Y))$.

SPAZI GENERALIZZATI

Il lemma di Yoneda mi garantisce che h sia iniettivo a livello degli oggetti e pienamenta fedele per quanto riguarda i morfismi, cioe che $\hat{\mathcal{C}}$ contiene una copia di $\mathcal{C}$.
Ma l'astuto Yoneda mi dice molto di più, infatti dire F(X)=Hom(h_X^{op},F), per ogni F oggetto di $\hat{\mathcal{C}}$, significa dire che , preso un oggetto qualunque anche non rappresentabile di $\hat{\mathcal{C}}$, posso pensarlo come oggetto di C dicendo

che $Hom_C(X,F) \triangleq Hom_{\hat{C}}(h_X^{op},F)$. Questástrazione è giustificata anche da unánalogia di formalismo, infatti:
$Hom_{\hat{C}}(h_X^{op},h_Y^{op}) = h_Y^{op}(X) = Hom_C(X,Y)$.
$Hom_{\hat{C}}(h_X^{op},F)$=F(X)= ...

Esiste un modo canonico di rappresentare, a livello di oggetti, anche Hom(X,Y) in $\hat{\mathcal{C}}$, a patto che nella mia categoria di partenza si possa fare il prodotto di oggetti. $Hom(X,Y) \rightarrow$ **Hom(X,Y)** $\in \hat{\mathcal{C}}$
Allora: mantre Hom(X,Y) è un insieme di morfismi, **Hom(X,Y)** è un funtore che adesso vado a definire.
Sugli oggetti: $\forall$ Z$\in$ C, **Hom(X,Y)**(Z)$\doteq$Hom(X*Z,Y).
Sui morfismi: $\forall f \in Hom(Z,W)$, **Hom(X,Y)**(f)=$f^* \doteq (id_X, f)$.
Notiamo che f^* va da **Hom(X,Y)**(W) a **Hom(X,Y)**(Z), per quanto riguara la composizione di morfismi abbiamo che $f^* \circ g^* = (id_X,f)\circ(id_X,g) = (id_X, f\circ g) = (f\circ g)^*$, quindi il funtore che abbiamo definito rispetta la composizione dei morfismi ed è perciò effettivamente un funtore.

Il motivo per cui scelgo di rappresentare Hom(X,Y) in questo modo saranno chiariti meglio nella sezione di topologia; comunque è il medoto piu'intuitivo: orientativamente equivale a dire: penso una successione di funzioni $f_n(x)$ come unúnica funzione di due variabile f(n,x).

Una volta trasformato Hom(X,Y) in oggetto di $\hat{\mathcal{C}}$ posso, ad esempio, parlare di morfismi tra Hom(X,Y) e Hom(W,Z) come se fossero oggetti della mia categoria di partenza: i loro morfismi saranno i loro morfismi in $\hat{\mathcal{C}}$. Per essere precisi Hom(X,Y) e Hom(W,Z) sono oggetti generalizzati e i loro morfismi sono morfismo generalizzati, ma si e sostanzialmente autorizzati a confondere i due concetti. Alcuni dei numerosi vantaggi che questo tipo di approccio dà saranno messi in luce nelle sezioni successive.

3 LA TAZZA E LA CIAMBELLA (ovvero la concretezza del geometra)

Nota al lettore. In questo paragrafo utilizzeremo due diverse notazioni per indicare le applicazioni continue tra spazi topologici. Scriveremo:

1. **C**(X,Y) per indicare l'insieme delle applicazioni continue da X in Y;
2. **Mappe**(X,Y) per sottolinearne la natura funtoriale.

Le motivazioni che ci spingono a questa scelta appariranno presto chiare.

In questa sezione ci proponiamo di affrontare un particolare e significativo esempio nell'ambito della teoria delle categorie: quello degli spazi topologici, alias categoria **Top**. Alla persona coerente sarà certamente sorta la domanda: "Ma perchè abbiamo dovuto scomodare concetti così astratti?". Ebbene, tutto questo ambaradan ci permetterà di :

1. definire in maniera estremamente intuitiva la nozione di *omotopia* (vedi paragrafo successivo), considerando l'insieme **Mappe**(X,Y) come se fosse dotato di struttura topologica, indipendentemente dalle topologie su X ed Y;

2. dimostrare risultati notevoli in contesto omotopico senza sforzo eccessivo.

Fatto questo preambolo, passiamo al nocciolo della questione, traducendo le nozioni del paragrafo precedente in termini topologici. In primis scriviamo il funtore dell' *immersione di Yoneda*:

$$\mathbf{Top} \xrightarrow{h^{op}} \widehat{\mathbf{Top}} \overset{DEF}{=} \{\mathbf{Top}^{op} \to \mathbf{Set}\} \tag{3.1}$$

così definito:

$$X \mapsto h_X^{op}$$

Ora ci domandiamo se sia in generale possibile pensare a **C**(X,Y) come ad uno spazio topologico. Subito ci balena un'idea: è possibile dotare **C**(X,Y) esplicitamente di una topologia? La risposta è sì! Questa topologia è detta compatta-aperta. Non è nostra intenzione costruire "a mano" questa topologia, ma notiamo che essa, per possedere buone proprietà, richiede che X sia *localmente compatto di Hausdorff*. Ora pensiamo al *Lemma di Yoneda*: esso ci dice che possiamo identificare un generico X $\in$ Ob(**Top**) con il funtore $h_X^{op} \in Ob(\widehat{\mathbf{Top}})$. Cioè, dotando l'insieme **C**(X,Y) della compatta-aperta (e rendendolo dunque un oggetto di **Top**), esso diventa *rappresentabile* in $\widehat{\mathbf{Top}}$.

Consideriamo ora un generico funtore $F \in \widehat{\mathbf{Top}}$ (non necessariamente rappresentabile): ci chiediamo se non sia possibile in qualche modo pensarlo come uno spazio topologico. In effetti è lo stesso *Lemma di Yoneda* a suggerire questa generalizzazione: esso, infatti, ci garantisce l'esistenza del seguente isomorfismo:

$$F(X) \cong \mathbf{Hom}_{\widehat{\mathbf{Top}}}(h_X^{op}, F) = \{h_X^{op} \to F\} \tag{3.2}$$

Perciò, considerando l'identificazione

$$X \quad '' ='' \quad h_X^{op}$$

otteniamo:

$$F(X) \quad '' ='' \quad \{X \to F\} \tag{3.3}$$

Ovviamente il termine a destra dell'identificazione rappresenta un insieme di morfismi tra *funtori*. Prima di proseguire presentiamo una notevole conseguenza del Lemma di Yoneda: nel caso in cui F sia un funtore rappresentabile, cioè $F = h_Y^{op}(= \mathbf{C}(-, Y))$ si ottiene la seguente relazione:

$$\mathbf{Hom}_{\widehat{\mathbf{Top}}}(h_X^{op}, h_Y^{op}) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y)(= \mathbf{C}(X, Y)) \tag{3.4}$$

Vale a dire che siamo in grado di identificare le applicazioni continue in **Top** con quelle funtoriali in $\widehat{\mathbf{Top}}$. A questo punto possiamo facilmente pensare agli oggetti di **Top** come ad una generalizzazione del concetto di spazio topologico e dunque considerare *applicazioni continue* in $\widehat{\mathbf{Top}}$, che, d'ora in avanti, chiameremo categoria degli spazi topologici *generalizzati*. Orgogliosi del risultato ottenuto, torniamo al caso interessante: quello di **Mappe**(X,Y). L'affermazione cruciale è la seguente: *possiamo pensare alle applicazioni continue da X a Y come ad un funtore di* $\widehat{\textit{\textbf{Top}}}$*, , cioè come ad uno spazio topologico generalizzato!* Per far ciò imponiamo la seguente definizione, già vista nel precedente capitolo in forma astratta:

$$\mathbf{Mappe}(X,Y)(Z) \overset{DEF}{=} \mathbf{C}(Z \times X, Y) \tag{3.5}$$

Per le osservazioni precedenti risulta inoltre che:

$$\mathbf{Mappe}(X,Y)(Z) \ \ '' ='' \ \ \{Z \to \mathbf{Mappe}(X,Y)\}$$

Dunque, mettendo tutto insieme, possiamo finalmente pensare al funtore **Mappe**(X,Y) come ad uno *spazio topologico generalizzato* ed abbiamo, inoltre, dato un senso alla nozione di *applicazione continua tra spazi topologici generalizzati*. Ci resta, perciò, da verificare che $\mathbf{Mappe}(X,Y) \in \widehat{\mathbf{Top}}$, ma prima verifichiamo la bontà della definizione (5), scrivendo esplicitamente quali sono i punti dello spazio generalizzato **Mappe**(X,Y):

$$\mathbf{Mappe}(X,Y)(*) = \{* \to \mathbf{Mappe}(X,Y)\} \overset{DEF}{=} \mathbf{C}(* \times X, Y) = \mathbf{C}(X,Y) \ni f \tag{3.6}$$

Ritroviamo esattamente quello che ci aspettavamo, vale a dire che gli elementi di **Mappe**(X,Y) sono esattamente le applicazioni continue da X a Y. Passiamo ora alla verifica più noiosa: verifichiamo la natura funtoriale di

$$\mathbf{Mappe}(X,Y) : \mathbf{Top}^{op} \to \mathbf{Set} \tag{3.7}$$

1. *oggetti*: $\forall Z \in \mathbf{Top}^{op}$, $\mathbf{Mappe}(X,Y)(Z) = \mathbf{C}(Z \times X, Y) \in \mathbf{Set}$
2. *morfismi*: data $f \in \mathbf{Hom}_{\widehat{\mathbf{Top}}}(Z_2, Z_1)$

   $$f : Z_1 \to Z_2$$

   consideriamo la seguente applicazione continua:

   $$(f, id_X) : Z_1 \times X \to Z_2 \times X$$

   Risulta definita la seguente applicazione di insiemi **Mappe**(X,Y)(f):

   $$(\mathbf{Mappe}(X,Y)(Z_2) =)\mathbf{C}(Z_2 \times X, Y) \to \mathbf{C}(Z_1 \times X, Y)(= \mathbf{Mappe}(X,Y)(Z_1))$$

   $$\varphi \longmapsto \varphi \circ (f, id_X)$$

Analogamente si verificano le altre proprietà:

$$\mathbf{Mappe}(X,Y)(1_Z) = 1_{\mathbf{Mappe}(X,Y)}$$

$$\mathbf{Mappe}(X,Y)(f \circ g) = \mathbf{Mappe}(X,Y)(f) \circ \mathbf{Mappe}(X,Y)(g)$$

Abbiamo così dimostrato che **Mappe**(X,Y) è, in effetti, un *funtore*.

4 GIOCHIAMO CON GLI ELASTICI deformazioni di spazi e cammini

Un concetto fondamentale (e fortunatamente anche abbastanza intuitivo) della topologia é quello di *deformazione con continuitá* (di spazi, di applicazioni, di cammini, etc...). Spesso puó essere interessante cercare di comprendere cosa succede ad uno spazio, o ad un arco, se esso viene deformato in modo continuo e senza strappi, un po' come se fosse fatto di gomma. Tale concetto si formalizza con la nozione di **omotopia**.

Definizione : Date due applicazioni continue f_0, f_1 in $Hom(X,Y)$, f_0 e f_1 si dicono *omotope* se $\exists f : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ tale che $f(0,x) = f_0(x)$ *e* $f(1,x) = f_1(x)\ \forall x \in X$. Quindi, in altre parole, due curve sono omotope se e solo se sono etremi di un arco in Hom(X,Y). Dal momento che $Hom(Z, Hom(X,Y)) := Hom(Z \times X, Y)$ allora

$$f : [0,1] \longrightarrow Hom(X,Y)$$

$$t \longmapsto f_t(x) := f(t,x)$$

Oss. Essere applicazioni omotope è una relazione di equivalenza (denotiamola con $\sim$) .
Notazione: $[X,Y] := Hom(X,Y)/\sim := \pi_0(Hom(X,Y))$ (ricordiamo: spazio delle componenti connesse per archi).
Oss. Se A e B sono spazi topologici:

1. $f \in Hom(A,B)$ induce un'applicazione al quoziente $\pi_0(f) : \pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(B)$ t.c. se a $\in$ A , $\pi_0(f)([a]) := [f(a)]$
2. $\pi_0(A \times B) = \pi_0(A) \times \pi_0(B)$

Attraverso questa definizione, ció che abbiamo ottenuto è una nuova categoria. Quindi otteniamo:

$$\mathbf{Top} \rightsquigarrow \mathbf{HoTop}$$

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ \downarrow f & & \downarrow [f] \\ Y & & Y \end{array}$$

Con Ob(**Top**) = Ob(**HoTop**) = {spazi topologici} , ma mentre Morph(**Top**)= {applicazioni continue}, Morph(**HoTop**) = {classi di omotopia di applicazioni}. Così facendo, otteniamo che se due spazi sono isomorfi in **HoTop**, allora lo sono anche in **Top** (nota bene che in generale il contrario non è vero).

Def. X, Y spazi topologici si dicono *omotopicamente equivalenti* se sono isomorfi come oggetti di **HoTop** , cioé se

$$\exists\ [f] : X \longrightarrow Y \quad , \ [g] : Y \longrightarrow X$$

t.c.

$$[f \circ g] = [id_X]$$

e

$$[g \circ f] = [id_Y]$$

Def. Uno spazio topologico si dice *contrattile* se é omotopicamente equivalente ad un punto. In particolare, l'identitá é omotopa ad un'applicazione costante.

Def. Siano X,Y spazi topologici tale che $i : X \hookrightarrow Y$. Una *retrazione* di Y su X é un'inverso a sinistra di i, cioé é $r : Y \to X$ t.c. $r \circ i = id_X$ (X si dice *retratto* di Y). In particolare, se $x \in X \Rightarrow \ r(x) = x$. In poche parole, è un'applicazione continua che porta tutto Y in X lasciando fissi tutti i punti di X
Def. Y é un *retratto per deformazione* di X se l'inclusione i é un'equivalenza omotopica . Una *deformazione* di Y su X é un'applicazione $R : [0,1] \times Y \longrightarrow Y$ t.c. :

1. $R(0,y) \in X$ e $R(1,y) = y \quad \forall y \in Y$
2. $R(t,x) = X \ \forall x \in X \ , \ t \in [0,1]$

Un retratto per deformazione, quindi, è un retratto in cui la contrazione avviene con continuitá.
Cerchiamo di capire in breve cosa stiamo facendo. Il semplice fatto di allargare o restringere uno spazio mi dá la possibilità di controllare oggetti che non conosco identificandoli con oggetti che invece conosco.

Ex. Un *bouquet di k sfere* (ebbene sí, si chiama cosi...) sono k copie di S^n attaccate in un punto. Ora prendo un quadrato (che chiamo **A**) con bordo. Tolgo un qualunque punto in **Å**. Che cosa ottengo? Bene, avendo tolto un punto posso retrarre tutto lo spazio sul bordo (immaginate di mettere le dita nel microscopico forellino che ottenete togliendo il punto e tirare verso l'esterno...). Quello che viene fuori è semplicemente un S^1 (cui il bordo del quadrato é omeomorfo, come tutti ben sappiamo). E se invece di un punto ne tolgo due? Applico lo stesso procedimento, e quello che ottengo è il bordo di un quadrato con due dei lati opposti uniti da un segmento. Il che é esattamente la stessa cosa di un bouquet di due S^1 !!! E se ne tolgo k? A questo punto, anche i meno perspicaci avranno capito come funziona...ovviamente otterró un bouquet di k S^1 .

5 GRUPPI E GRUPPOIDI Il gruppoide di Poincaré e il primo gruppo di omotopia

Sia X uno spazio topologico, $x_0, x_1 \in X$. Definiamo

$$\Omega(X, x_0, x_1) := \{\alpha : [0,1] \to X \;\; con \;\; \alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1\}$$

Cioé lo spazio dei cammini in X di punto iniziale x_0 e punto finale x_1. Allora:

Def.

$$\Pi_X(x_0, x_1) := \pi_0(\Omega(X, x_0, x_1))$$

si chiama *Gruppoide di Poincaré* di X.

Ex. $X = [0,1] \;\Rightarrow \Pi_X(0,1)$ consiste di un solo elemento.

Dim

$$f_0, f_1 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

$$f_0(0) = f_1(0) = 0$$

$$f_0(1) = f_1(1) = 1$$

$\Rightarrow\;\; \exists\; f_t : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ con estremi $f_0 \; e \; f_1$ ($f_t(0) = 0$, $f_t(1) = 1 \;\; \forall t$). Basta prendere f_t combinazione convessa di $f_0 \; e \; f_1$

$$f_t(x) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$$

$\longrightarrow$ un cambio di parametrizzazione é un'equivalenza omotopica.

Prodotto di cammini

$$\Omega(X, x_0, x_1) \times \Omega(X, x_1, x_2) \longrightarrow \Omega(X, x_0, x_2)$$

$$(\alpha \qquad , \qquad \beta) \longmapsto \alpha * \beta$$

definito come

$$\alpha(2t) \quad t \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$\alpha(2t-1) \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]$$

Inoltre, dati α, β, γ,

$$(\alpha * \beta) * \gamma =_{HoTop} \alpha * (\beta * \gamma)$$

Quindi

$$\Pi_X(x_0, x_1) \times \Pi_X(x_1, x_2) \longrightarrow \Pi_X(x_0, x_2)$$

$$([\alpha] \quad , \quad [\beta]) \longmapsto [\alpha * \beta]$$

é associativo.

Inverso di un cammino

$$\Omega(X, x_1, x_2) \longrightarrow \Omega(X, x_0, x_2)$$

$$[\alpha] \longmapsto [inv\alpha]$$

definito come $\alpha(1-t)$, e ottengo che :

$$\alpha * inv\alpha \simeq_{HoTop} 1_X$$

$$inv\alpha * \alpha \simeq_{HoTop} 1_X$$

Cosa succede se consideriamo cammmini che cominciano e finiscono in uno stesso punto?

Def.

$$\Pi_X(x, x) := \pi_1(X, x)$$

é un gruppo, e si chiama *gruppo fondamentale* o *primo gruppo di omotopia.*

Def. X spazio topologico, X si dice *semplicemente connesso* se $\pi_1(X, x)$ é banale.

6 RIVESTIMENTI E SOLLEVAMENTI e non finisce qua...

Def. X spazio topologico connesso e localmente connesso per archi. Un'applicazione continua e suriettiva $\pi : \tilde{X} \to X$ si chiama *rivestimento* di X se $\forall x \in X$ $\exists$ un aperto connesso $U \in X$ tale che :

1. $x \in U$
2. Se $V \subset \tilde{X}$ componente connessa di $\pi^{-1}(U)$ (fibra) , allora $\pi : V \to U$ é un omeomorfismo.

Se $\forall x \in X \ \ \left|\pi^{-1}(x)\right| = n$ finito, allora diremo che il rivestimento ha grado n .

Def. Sia $\pi : \tilde{X} \to X$ un rivestimento, e $f : X \to Y$ applicazione continua. Un *sollevamento* é un'applicazione $g : Y \to \tilde{X}$ che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

7 AZIONI PROPRIAMENTE DISCONTINUE (un ultimo sforzo...)

Def. Sia G gruppo discreto, $G \times \tilde{X} \to \tilde{X}$ azione, si dice che G agisce in modo *propriamente discontinuo* se $\forall \tilde{x} \in \tilde{X} \quad \exists\ U \in I(x)$ t.c. $U \cap g \cdot U = \emptyset\ \forall g \neq e$.

Teorema : Siano $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ uno spazio topologico semplicemente connesso e localmente connesso per archi e $(G, \cdot)$ un gruppo topologico discreto che agisce su $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ in modo propriamente discontinuo. Detto (X, τ) il quoziente X/G si ha che $\pi_1(X) \simeq G$.

Dim :

Siano $\widehat{Top_*} \hookrightarrow \widehat{Top}$ e $\begin{array}{ccccc} Grp & \cap & Top & \hookrightarrow & Grp \\ & & & \hookrightarrow & Top \end{array}$ due categorie cosí definite:

$\widehat{Top_*}$ é la categoria degli spazi topologici generalizzati della forma $\Omega(Y, y, y)$ al variare di $Y \in Top$ e $y \in Y$, mentre $Grp \cap Top$ la categoria dei gruppi tolologici (il simbolo di intersezione é un evidente abuso di notazione) . Si puó dunque definire un diagramma funtoriale

$$\begin{tikzcd} \widehat{Top_*} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"] & \widehat{Top} \arrow[r] & Top \arrow[r] & Grp \cap Top \arrow[r, "\mathbb{C}"] & Grp \\ Grp \arrow[urrrr] & & & & \end{tikzcd}$$

le cui frecce siano tali che:

$$\begin{tikzcd} \Omega(X, x, x) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"] & \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}, \pi^{-1}(x)) \arrow[r, "ev_1"] & \pi^{-1}(x) \arrow[r, "\sim"] & G \arrow[r, "Id"] & G \\ \pi_1(x) \arrow[urrrr, "\sim", "\varphi"'] & & & & \end{tikzcd}$$

In particolare il funtore $\mathbb{C}$ muta la struttura G come spazio topologico nella sua struttura di gruppo. Per dimostrare il teorema occorre costruire un omomorfismo φ di gruppi che sia un isomorfismo e che renda commutativo il diagramma.

Si osservi che come conseguenza del lemma di Yoneda , gli spazi topologici generalizzati $\Omega(X,x,x)$ e $\Omega(\tilde{X},\tilde{x},\pi^{-1}(x))$

possono essere pensati come ordinari spazi topologici , e dunque ha senso parlare di mappe continue fra $\Omega(X,x,x)$ e $\Omega(\tilde{X},\tilde{x},\pi^{-1}(x))$.
Siano $\alpha \in \Omega(X,x,x)$ un cammino chiuso di punto base x e $[\alpha]$ la sua classe di omotopia nel gruppo fondamentale . Poiché G agisce in modo propriamente discontinuo su $\tilde{X}$, la proiezione $\pi : \tilde{x} \to X = \tilde{X}/G$ é un rivestimento connesso e le fibre $\pi^{-1}(x)$, $x \in X$ sono tutte discrete ed equipotenti (come insiemi) . Si puó dunque considerare un sollevamento continuo di cammini da $\Omega(X,x,x)$ in $\Omega(\tilde{X},\tilde{x},\pi^{-1}(x))$, che porti il cammino α nel cammino $\tilde{\alpha}$, dove il punto iniziale di $\tilde{\alpha}$ é $\tilde{x}$ ed il suo punto finale $\underline{\tilde{x}}$. In generale $\tilde{x} \neq \underline{\tilde{x}}$, ma sia $\tilde{x}$ che $\underline{\tilde{x}}$ appartengono a $\pi^{-1}(x)$. $\tilde{x}$ dipende dal sollevamento, ma scelta $\tilde{x}$ si ha che $\underline{\tilde{x}}$ è fissata. L'applicazione $ev_1 : \Omega(\tilde{X},\tilde{x},\pi^{-1}(x)) \to \Omega(X,x,x)$ é la valutazione del cammino $\tilde{\alpha}$ in 1 (ed è dunque continua). Sussiste quindi un isomorfimo di insiemi, dunque una biiezione, tra $\pi^{-1}(x)$ e G. Le fibre $\pi^{-1}(x)$ hanno infatti la forma $G_x\{x\}$ (in virtú della propria discontinuità dell'azione di G su X) e dunque l'applicazione $g \mapsto g \cdot \tilde{x}$, $\tilde{x}$ e $\pi^{-1}(x)$ definisce la biiezione cercata. A questo punto l'omomorfismo di gruppi $\phi : \pi^{-1} \to G$ che definisce l'isomorfismo cercato e che fa commutare il fiadramma é $\phi([\alpha]) = g$ ove $g \cdot \tilde{x} = \alpha(1)$ (questo g è unico perchè $G \simeq \pi^{-1}(x)$). Tale applicazione, che si verifica semplicemente essere un isomorfismo, fa commutare il diagramma, e questo prova la tesi. QED

Esiste un'interessante caratterizzazone del gruppo fondamentale $\pi_1(X)$, con $X = \tilde{X}/G$. Si può infatti provare che

$$G \simeq Deck(\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X)$$

ove

$$Deck(\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X)$$

è il gruppo degli automorfismi nella categoria dei rivestimenti di X. Si ricorda che un morfismo nella categoria dei rivestimenti é un diagramma commutativo del tipo

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[r, "f"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"'] \arrow[dr, "\pi_1"'] & \tilde{X}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Un importante teorema (probabilmente il piú importante) sul sollevamento é il **Teorema di esistenza e unicitá del sollevamento**(qui non lo dimostreremo per questioni di spazio...), che sostiene che il sollevamento di un'applicazione, se esiste é unico, a meno di omotopia.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Manetti, Topologia, Springer-Verlag