Lo spazio vettoriale delle forme multilineari antisimmetriche Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$, di caratteristica diversa da 2, ovvero tale che $1+1 \neq 0$ in $\mathbb{K}$. Tale ipotesi è necessaria in quanto esistono campi, anche di uso "quotidiano" come il campo $\mathbb{F}_2$ con due elementi, nei quali vale invece $1+1=0$. Questo implica che $-1=1$ in $\mathbb{K}$ rendendo insensato quel che stiamo per dire in questa sezione.

Lo spazio vettoriale $\wedge^n V^*$ delle *forme multilineari antisimmetriche di grado* n su V è definito come segue:

$$\wedge^n V^* = \{\omega : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n \text{ copie}} \to \mathbb{K}\}$$

tali che

1. ω è *multilineare*, ovvero è lineare in tutte le variabili. in altre parole: $\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda_1 v_{i,1} + \lambda_2 v_{i,2}, v_{i+1}, \ldots v_n) = \lambda_1 \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i,1}, v_{i+1}, \ldots v_n) + \lambda_2 \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i,2}, v_{i+1}, \ldots v_n)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$;

2. ω è *antisimmetrica*, ovvero per ogni permutazione σ dell'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ si ha $\omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma \omega(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, dove $(-1)^\sigma$ indica il segno della permutazione σ, ovvero vale 1 se σ è data da un numero pari di scambi, e vale -1 se σ è data da un numero dispari di scambi.

Osserviamo che, se ω è multilineare, l'antisimmetria è equivalente al fatto che ogni qual volta due argomenti di ω sono uguali, il valore di ω è zero:

$$\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_n) = 0.$$

Per convincersi di questo basta osservare che se ω è antisimmetrica, allora scambiando la variabile che oppuca il posto i con quella che occupa il posto j corrisponde a fare esattamente uno scambio, e poiché 1 è dispari, l'espressione deve cambiare segno:

$$\begin{aligned}\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n) =\\ - \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)\end{aligned}$$

A questo punto, ponendo $v_i = v_j = w$ si ha la tesi. Vice versa, se

$$\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_n) = 0$$

per ogni w, allora ponendo $w = v_i + v_j$ si ottiene

$$\begin{aligned}0 &= \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i + v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n)\\ &= \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n) +\\ &\quad + \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n) +\\ &\quad + \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n) +\\ &\quad + \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n)\\ &= \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_n) +\\ &\quad + \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n),\end{aligned}$$

ovvero l'antisimmetria.

Osserviamo inoltre che conseguenze immediate della multilinearità e dell'antisimmetria sono:

1. $\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \ldots, v_n) = 0$;
2. $\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + \lambda v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \omega(v_1 \ldots, v_n)$, $\forall i \neq j$; cioè il valore di ω non cambia se si sostituisce l'i-esimo vettore con l'i-esimo vettore più un arbitrario multiplo scalare del j-esimo vettore (con $i \neq j$).

La struttura di spazio vettoriale su $\wedge^n V^*$ è quella ovvia:

$$(\omega + \eta)(v_1, \ldots, v_n) := \omega(v_1, \ldots, v_n) + \eta(v_1, \ldots, v_n);$$

$$(\lambda\omega)(v_1, \ldots, v_n) := \lambda(\omega(v_1, \ldots, v_n)).$$

Proposizione. Lo spazio vettoriale $\wedge^n V^*$ ha dimensione uguale ad 1.
Dimostrazione. Sia $\mathcal{V} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V. Consideriamo l'applicazione $\Phi : \wedge^n V^* \to \mathbb{K}$ definita da

$$\Phi(\omega) = \omega(e_1, \ldots, e_n)$$

È immediato osservare che Φ è un'applicazione lineare. Inoltre è iniettiva. Supponiamo infatti che ω sia un elemento del nucleo di Φ e siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori arbitrari di V. Poiché $\mathcal{B}$ è una base di V, avremo $v_i = v_i^j e_j$, per oppurtuni elementi $v_i^j \in \mathbb{K}$. Allora dalla multilinearità di ω si ha

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) = \omega(v_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots v_n^{i_n} e_{i_n})$$
$$v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} \omega(e_{i_1}, \ldots e_{i_n}).$$

Nell'ultima espressione, come argomento di ω comapiono i vettori della base $\mathcal{B}$; usiamo l'antisimmetria per riordinarli:

$$\omega(e_{i_1}, \ldots e_{i_n}) = \epsilon_{i_1,\ldots,i_n} \omega(e_1, \ldots, e_n),$$

dove $\epsilon_{i_1,\ldots,i_n}$ è il *simbolo totalmente antisimmetrico* (o simbolo di Levi-Civita), definito da

$$\epsilon_{i_1,\ldots,i_n} = \begin{cases} +1 \text{ se } 1 \mapsto i_1,\ 2 \mapsto i_2, \ldots \text{ è una permutazione pari;} \\ \\ -1 \text{ se } 1 \mapsto i_1,\ 2 \mapsto i_2, \ldots \text{ è una permutazione dispari;} \\ \\ 0 \text{ se } 1 \mapsto i_1,\ 2 \mapsto i_2, \ldots \text{ non è una permutazione.} \end{cases}$$

Ad esempio:

$$\epsilon_{1,3,2} = -1; \qquad \epsilon_{2,3,1} = +1; \qquad \epsilon 1, 1, 3 = 0.$$

Avendo introdotto queste notazioni abbiamo

$$\begin{aligned}\omega(v_1, \dots, v_n) &= \epsilon_{i_1,\dots,i_n} v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} \omega(e_1, \dots, e_n) \\ &= \epsilon_{i_1,\dots,i_n} v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} \Phi(\omega) \\ &= 0,\end{aligned}$$

in quanto avevamo supposto $\omega \in \ker(\Phi)$. Riassumento, se $\Phi(\omega) = 0$, allora $\omega = 0$ (in quanto è nulla calcolata su un qualunque argomento), il che prova l'iniettività di Φ. Mostriamo ora la suriettività di Φ. Poiché $\mathbb{K}$ è generato da $1 \in \mathbb{K}$, basterà mostrare che esiste una forma multilineare antisimmetrica $\omega_{\mathcal{B}}$ tale che $\Phi(\omega_{\mathcal{B}}) = 1$. Da quanto appena osservato sull'iniettività di Φ segue subito che esiste un'unico possibile candidato per $\omega_{\mathcal{B}}$, vale a dire:

$$\omega_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) := \epsilon_{i_1,\dots,i_n} v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n}.$$

L'espressione a destra dell'uguale è effettivamente una forma multilineare antisimmetrica. La multilinearità si vede osservando che l'espressione $\epsilon_{i_1,\dots,i_n} v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n}$ è, rispetto ad ognuno dei vettori v_i, un'espressione omogenea di primo grado nelle coordinate v_i^j; l'antisimmetria è data dalla presenza del simbolo totalmente antisimmetrico.

Abbiamo dunque dimostrato che Φ è un isomorismo tra lo spazio vettoriale $\wedge^n V^*$ e lo spazio vettoriale $\mathbb{K}$. Poiché $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$, si ha la tesi.

È importante osservare che nel corso della dimostrazione abbiamo anche mostrato che, fissata comunque una base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V esiste ed è unica una forma multilineare antisimmetrica $\omega_{\mathcal{B}}$, di grado n, tale che

$$\omega_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^2$, e sia $\mathcal{B}$ la base canonica. Allora, se

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \qquad v_1 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

si ha:

$$\omega_{\mathcal{B}}(v_1, v_2) = ad - bc.$$

Il determinante di un endomorfismo

Alla definizone del determinante di un endomorfismo premettiamo un semplice lemma: se W è uno spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbb{K}$ allora lo spazio vettoriale $\mathrm{End}(W)$ degli endomorfismi di W è canonicamente isomorfo al campo $\mathbb{K}$. Infatti, qualunque sia la dimensione di W l'applicazione

$$\mathbb{K} \to \mathrm{End}(W)$$

data da $\lambda \mapsto \lambda\,\mathrm{Id}$ è lineare e iniettiva. Se inoltre W ha dmensione 1, allora è un'applicazione lineare iniettiva tra spazi della stessa dimensione finita, e dunque è un isomorfismo. Questo fatto si può anche vedere nel modo seguente: sia $\{e\}$ una base di W. Allora se $\varphi : W \to W$ è un endomorfismo, φ è completamente determinato dal suo valore su e. Poiché e è una base di W si avrà $\varphi(e) = \lambda_{\varphi,e} e$, dove $\lambda_{\varphi,e} \in \mathbb{K}$ è uno scalare dipendente (a priori) da φ e da e. Cambiando base si vede però subito che $\lambda_{\varphi,e}$ è in effetti indipendente da e, e dipende solamente da φ. Comunque lo si sia dimostrato, quel che importa è il significato del lemma: se W è uno spazio vettoriale di dimensione 1, tutti e soli i suoi automorfismi sono le moltiplicazioni per gli scalari.

Sia ora V uno spazio di dimensione n, e sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo. Per $\omega \in \wedge^n V^*$, poniamo

$$(\varphi^*\omega)(v_1, \dots, v_n) := \omega(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)).$$

Si vede subito che $\varphi^*\omega$ è ancora un elemento di $\wedge^n V^*$, e che

$$\varphi^* : \wedge^n V^* \to \wedge^n V^*$$

è lineare. Ma abbiamo dimostrato che $\wedge^n V^*$ ha dimensione 1, quindi φ^* dev'essere la moltiplicazione per uno scalare, dipendente solamente da φ. Questo scalare prende il nome di *determinante* dell'endomorfismo φ e si indica con $\det(\varphi) \in \mathbb{K}$. Tutto quanto abbiamo detto finora si può riassumere dicendo che $\det(\varphi)$ è quello scalare caratterizzato dall'identità

$$\varphi^*\omega = \det(\varphi) \cdot \omega, \qquad \forall \omega \in \wedge^n V^*.$$

Le seguenti proprietà sono immediate:

1. $\det(\mathrm{Id}_V) = 1$.
2. $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi)\,\det(\psi)$ (formula di Binet).

Come corollario otteniamo che, se φ è invertibile, allora

$$\det(\varphi^{-1})\,\det(\varphi) = \det(\varphi^{-1} \circ \varphi) = 1,$$

dunque se φ è invertibile, anche il suo determinante è invertibile e si ha

$$\det(\varphi^{-1}) = \det(\varphi)^{-1}$$

È interessante osservare che vale anche il viceversa. Si ha cioè:

Proposizione. Sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora φ è invertibile se e solo se $\det(\varphi)$ è diverso da zero.
Dimostrazione. Abbiamo appena dimostrato che se φ è invertibile, allora anche $\det(\varphi)$ è invertibile. Poiché $\det(\varphi)$ è un elemento del campo $\mathbb{K}$, essere invertibile è equivalente ad essere diverso da zero. Viceversa, supponiamo che φ non sia invertibile e mostriamo che in questo caso si ha $\det(\varphi) = 0$. Poiché φ è un

endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita, la non invertibilità di φ equivale alla sua non iniettività, dunque esiste un vettore e_1 diverso da 0 in V tale che $\varphi(e_1) = 0$. Poiché $e_1 \neq 0$, l'insieme $\{e_1\}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti, e possiamo dnque completarlo a una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ di V. Sia $\omega_{\mathcal{B}}$ la forma antisimmetrica di grado n associata a questa base. Dalla definizione di determinate e di $\omega_{\mathcal{B}}$ abbiamo

$$\det(\varphi) = \det(\varphi)\omega_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \omega_{\mathcal{B}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)).$$

Ma $\varphi(e_1) = 0$, dunque

$$\omega_{\mathcal{B}}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)) = \omega_{\mathcal{B}}(0, \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)) = 0.$$

Come corollario immediato della proposizione precedente abbiamo che, se ω è una forma multilineare antisimmetrica di grado n su V con $\omega \neq 0$, allora un insieme di n vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V è una base se e solo se $\omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0$. Infatti, sia $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V. Poiché $\dim_{\mathbb{K}}(\wedge^n V^*) = 1$ e $\omega \neq 0$, si avrà $\omega = k\omega_{\mathcal{B}}$, con $k \neq 0$, $k \in \mathbb{K}$. Inoltre, per la proprietà universale delle basi, esiste ed è unica un'applicazione lineare $\varphi : V \to V$ tale che $\varphi(e_i) = v_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$, e sappiamo che φ è un isomorfismo se e solo se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base. Allora la tesi sege immeditamente dall'identità

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \det(\varphi)\omega(e_1, \dots, e_n) = k \det(\varphi).$$

Il calcolo esplicito dei determinanti

Vediamo ora come calcolare esplicitamente il determinante di un endomorfismo φ quando sia nota la matrice che lo rappresenta rispetto ad una data base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V. Per far questo basta ricordare la definizione del determinante di φ e il fatto che esiste (ed è unica) una forma multilineare antisimmetrica $\omega_{\mathcal{B}}$ tale che $\omega_{\mathcal{B}}(E_1, \dots, e_n) = 1$. Si ha infatti

$$\det(\varphi) = \det(\varphi)\omega_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \omega_{\mathcal{B}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)).$$

Se A è la matrice che rappresenta l'endomorfismo φ rispetto alla base $\mathcal{B}$, allora $\varphi(e_i) = A_i^j e_j$ e dunque, ripetendo i calcoli fatti all'inizio di questa nota,

$$\omega_{\mathcal{B}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = \omega_{\mathcal{B}}(A_1^{i_1} e_{i_1}, \dots A_n^{i_n} e_{i_n}) = \epsilon_{i_1, \dots, i_n} A_1^{i_1} \cdots A_n^{i_n}$$

In definitiva abbiamo trovato la formula esplicita

$$\det(\varphi) = \epsilon_{i_1, \dots, i_n} A_1^{i_1} \cdots A_n^{i_n}.$$

Da notare che, poiché lo scalare $\det(\varphi)$ è intrinsecamente definito, esso non dipende dalla scelta della base $\mathcal{B}$. Otteniamo così il seguente risultato non banale: nonostante i coefficienti (A_i^j) dipendano dalla base che si è scelta per rappresentare l'endomorfismo φ come una matrice, l'espressione $\epsilon_{i_1, \dots, i_n} A_1^{i_1} \cdots A_n^{i_n}$ è *invariante per cambiamenti di base.*

La formula di Laplace

La formula di Laplace è la riduzione del calcolo del valore di una forma multilineare antisimmetrica di grado n su uno spazio vettoriale di dmensione n al calcolo dei valori di n forme multilineari antisimmetriche di grado $n-1$ su spazi vettoriali di dimensione $n-1$. Non è altro che la generalizzazione ad n dimensioni delle classiche formule della geometria elementare

$$\text{Area parallelogramma} = \text{Base} \times \text{Altezza}$$
$$\text{Volume parallelepipedo} = \text{Area di base} \times \text{Altezza}$$

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una sua base. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ indichiamo con $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}$ il sottoinsieme ottenuto togliendo il vettore e_i da $\mathcal{B}$, e con $V_i \subseteq V$ il sottospazio generato da $\mathcal{B}_i$. Osserviamo che $\mathcal{B}_i$ è una base di V_i, che dunque ha dimensione $n-1$. Indichiamo inoltre con $\iota_i : V_i \to V$ l'inclusione e con $\pi_i : V \to V_i$ la proiezione di V su V_i data da

$$\pi_i : v \mapsto \sum_{j \neq i} v^j e_j.$$

Notiamo che $\pi_i \iota_i = \mathrm{Id}_{V_i}$, mentre se $v \in V$ si ha $v = \iota_i \pi_i(v) + v^i e_i$, per ogni $i = 1, \ldots, n$. Da notare che in questa formula non c'è una sommatoria sottointesa su i. Infatti è vero che l'indice i compare ripetuto in alto e in basso nell'addendo a destra, ma i è solo in basso nell'addendo a sinistra! Più esplicitamente, abbiamo le formule

$$v = \iota_1 \pi_1(v) + v^1 e_1; \qquad v = \iota_2 \pi_2(v) + v^2 e_2; \qquad \ldots$$

Infine, sempre per ogni $i = 1, \ldots, n$ consideriamo le applicazioni

$$\eta_i : \underbrace{V_i \times \cdots \times V_i}_{n-1 \text{ copie}} \to \mathbb{K}$$

definite da

$$\eta_i(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \omega_{\mathcal{B}}(\iota_i(v_1), \ldots, v_{i-1}, e_i, \iota_i(v_{i+1}), \ldots, \iota_i(v_n)).$$

È immediato osservare che η_i è una forma multilineare antisimmetrica di grado $n-1$ su V_i. Inlotre, calcolando η_i sui vettori della base $\mathcal{B}_i$ di V_i si ottiene 1, dunque $\eta_i = \omega_{\mathcal{B}_i}$.

Siano ora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ n arbitrari vettori di V, e calcoliamo

$$\omega_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_{i-1}, e_i, v_{i+1}, \ldots, v_n).$$

Scrivendo $v_j = \iota_i \pi_i(v_j) + v_j^i e_i$ e sfruttando la multilinearità e l'antisimmetria di $\omega_{\mathcal{B}}$ troviamo

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_{i-1}, e_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) &= \omega_{\mathcal{B}}(\iota_i \pi_i(v_1), \ldots, \iota_i \pi_i(v_{i-1}), e_i, \iota_i \pi_i(v_{i+1}), \ldots, \iota_i \pi_i(v_n)) \\ &= \omega_{\mathcal{B}_i}(\pi_i(v_1), \ldots, \pi_i(v_{i-1}), \pi_i(v_{i+1}), \ldots, \pi_i(v_n)).\end{aligned}$$

Possiamo ora calcolare $\omega_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$ in termini delle forme $\omega_{\mathcal{B}_i}$. Scrivendo il vettore v_k come $v_k = v_k^i e_i$, troviamo infatti

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) &= v_k^i \omega_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{k-1}, e_i, v_{k+1}, \dots, v_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} v_k^i \omega_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_{i-1}, e_i, v_i, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} v_k^i \omega_{\mathcal{B}_i}(\pi_i(v_1), \dots, \pi_i(v_{i-1}), \pi_i(v_i), \dots, \pi_i(v_{k-1}), \pi_i(v_{k+1}), \dots, \pi_i(v_n)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} v_k^i \omega_{\mathcal{B}_i}(\pi_i(v_1), \dots, \pi_i(v_{k-1}), \pi_i(v_{k+1}), \dots, \pi_i(v_n))
\end{aligned}$$

L'utilizzo pratico della formula di Laplace è molto più semplice di quanto la sua formulazione stratta potrebbe lasciar supporre. Vediamolo in un esempio. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Vogliamo calcolare $\det(\varphi)$. Abbiamo visto che

$$\det(\varphi) = \omega_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3),$$

dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo la formula di Laplace scrivendo il vettore v_2 come combinazione lineare dei vettori della base canonica (chiaramente potremmo fare lo stesso anche con v_1 o con v_3). Si ha $v_2 = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3$. Inoltre

$$\pi_1(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \pi_2(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \pi_3(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \pi_2(v_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \pi_3(v_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\det(\varphi) &= \omega_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) \\
&= -2\,\omega_{\mathcal{B}_1}(\pi_1(v_1), \pi_1(v_3)) + 3\,\omega_{\mathcal{B}_2}(\pi_2(v_1), \pi_2(v_3)) - 5\,\omega_{\mathcal{B}_1}(\pi_3(v_1), \pi_3(v_3)) \\
&= -2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 5 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -2(4+1) + 3(2-2) - 5(1+4) \\
&= -35.
\end{aligned}$$

Riassumendo, lo sviluppo di Laplace rispetto alla seconda colona del determinante di φ è

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 5\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

e il calcolo del determinante di una matrice 3×3 è stato ridotto al calcolo di 3 determinanti di matrici 2×2.

La formula di Cramer

Sia ω una forma multilineare antisimmetrica di gardo n su uno spazio vettoriale V di dimensione n, e siano $\{v_1, \ldots, v_n, w\}$ $n+1$ vettori di V. Allora si ha l'identità

$$\begin{aligned}\omega(v_1, \ldots, v_n)w = \omega(w, v_2, \ldots, v_n)v_1 + \omega(v_1, w, v_3, \ldots, v_n)v_2 + \cdots \\ + \omega(v_1, \ldots, v_{n-1}, w)v_n.\end{aligned}$$

(*identità di Cramer*). Dimostriamaola dapprima nel caso in cui $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sia una base di V. Fissiamo i vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e consideriamo le due applicazioni lineari $\varphi, \psi : V \to V$ definite da

$$\varphi : w \mapsto \omega(v_1, \ldots, v_n)w$$

$$\psi : w \mapsto \omega(w, v_2, \ldots, v_n)v_1 + \omega(v_1, w, v_3, \ldots, v_n)v_2 + \cdots + \omega(v_1, \ldots, v_{n-1}, w)v_n.$$

Allora dimostrare l'identità di Cramer si riduce a dimostrare che $\varphi = \psi$. Poiché due applicazioni lineari coincidono se e solo se coincidono su una base dello spazio vettoriale di partenza, e poiché stiamo supponendo che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sia una base di V, la dimostrazione dell'identità di Cramer in questo caso si riduce a verificare

$$\varphi(v_i) = \psi(v_i)$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$, il che è immediato.

Dimostriamo ora la formula nel caso in cui $\{v_1, \ldots, v_n\}$ non siano una base. In questo caso $\omega(v_1, \ldots, v_n) = 0$ e dunque la formula di Cramer si riduce all'identità

$$\omega(w, v_2, \ldots, v_n)v_1 + \omega(v_1, w, v_3, \ldots, v_n)v_2 + \cdots + \omega(v_1, \ldots, v_{n-1}, w)v_n = 0$$

quando $\{v_1, \ldots, v_n\}$ non è una base di V. Poiché V ha dimensione n, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ non è una base se e solo se i vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono linearmente dipendenti. A meno di rinumerare i vettori possiamo supporre sia v_n ad essere linearmente dipendente da $\{v_1, \ldots, v_{n-1}$. Esisteranno cioè scalari λ^i tali che $v_n = \lambda^1 v_1 + \cdots + \lambda^{n-1} v_{n-1}$. Adesso osserviamo che per multilinearità ed antisimmetria si ha

$$\begin{aligned}\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n) &= \lambda^i \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_i) \\ &= -\lambda^i \omega(v_1, \ldots, v_{n-1}, w),\end{aligned}$$

per ogni $i = 1, \dots, n-1$. Dunque

$$\sum_{i=1}^{n-1} \omega(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n) v_i = \omega(v_1, \dots, v_{n-1}, w) \left(- \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i v_i \right)$$
$$= -\omega(v_1, \dots, v_{n-1}, w) v_n,$$

ovvero l'identità di Cramer.

Una tipica (ed immediata) applicazione della formula di Cramer è la seguente: sia ω una forma non nulla, e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Allora le coordinate w^i di un vettore w rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono date da

$$w^i = \frac{\omega(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)}{\omega(v_1, \dots, v_n)}.$$

La formaula di Cramer può essere utilizzata per la soluzione dei sistemi lineari con n equazioni in n incognite, come nell'esempio seguente. Supponiamo di voler risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

con $x, y \in \mathbb{R}$. Questo sistema è equivalenta all'equazione vettoriale

$$x\, v_1 + y\, v_2 = w$$

in $\mathbb{R}^2$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dalla formula di Cramer, indicata con $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$, abbiamo

$$\omega_{\mathcal{B}}(v_1, v_2) w = \omega_{\mathcal{B}}(w, v_2) v_1 + \omega_{\mathcal{B}}(v_1, w) v_2,$$

ovvero

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} w = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_1 + \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_2,$$

cioè

$$-3\, w = -3\, v_1 - 3\, v_2,$$

da cui

$$w = 1\, v_1 + 1\, v_2$$

e ne ricaviamo

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Osserviamo inoltre che $\omega_{\mathcal{B}}(v_1, v_2) = -3 \neq 0$ ci dice anche che $\{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e dunque quella appena trovata è anche l'unica soluzione del sistema dato.