I numeri di Fibonacci sono definiti dalla ricorsione

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

con dato iniziale $F_0 = 0$; $F_1 = 1$. Dalla Formula si vede facilmente che i primi termini della successione di Fibonacci sono $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. Ci interessa trovare una formula chiusa per l'n-mo numero di Fibonacci.

Cominciamo col riscrivere la ricorsione che definisce i numeri di Fibonacci come

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

, ovvero, prendendo $n-1$ al posto di n,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

. Riscrivendo ricorsivamente il terine di destra e ricordando che $(F_1, F_0) = (1, 0)$ arriviamo finalmente all'espressione

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infine, osservando che

$$F_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

Troviamo finalmente la fomula

$$F_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rimane da esplicitare la potenza

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

Per far questo cerchiamo una decomposizione di Jordan dell'applicazione lineare φ rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^2$. Il polinomio caratteristico di φ è

$$p_\varphi(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 - t - 1$$

le cui radici sono

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

entrambe con molteplicità algebrica pari a 1. Questo ci dice subito che l'applicazione φ è diagonalizzabile, e non ci sarà pertanto una parte nilpotente di cui doversi preoccupare. Con un po' di pazienza, oppure utilizzando il fidato Maple, si trova che una base di autovettori per φ è data da

$$|\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$|\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

In questa base l'applicazione φ è rappresentata dalla matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

e dunque φ^n è rappresentata da

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Indichiamo con

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

matrice che rappresenta l'identità con la base di autovettori come base di partenza e con la base canonica di $\mathbb{C}^2$ come base di arrivo. Allora, il fatto che l'applicazione φ^n sia rappresentata nella base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

ci porta subito all'identità matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = P \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Otteniamo così la formula

$$F_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il prodotto $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} P$ è immediato: si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Per calcolare $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è necessario calcolare l'inversa di P, ma basta accorgersi che $v = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è la soluzione del sistema $Pv = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice P

infatti è invertibile (si tratta della matrice di un cambio di base) e il sistema può essere risolto agevolmente con la formula di Cramer:

$$v^1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$v^2 = \frac{\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Abbiamo quindi

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

ovvero, finalmente,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

Osserviamo che, poiché

$$\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| \simeq 0.6180339 < 1$$

si ha

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \to 0, \qquad \text{per} \qquad n \to +\infty,$$

e dunque, per n molto grandi si ha

$$F_n \simeq \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Da questo segue, in particolare,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

fin qui giungerai e non oltre