Esonero di Algebra lineare del 25 novembre 2010

Esercizio 1. (1) Scrivere il numero complesso $\dfrac{(1+i)^2}{3-2i}$ nella forma $a+ib$.

(2) Calcolare il modulo e la parte reale di $(1+i)^3(1-i)^3$.

(3) Calcolare il modulo e la parte reale di $(1+i)^{476}\left(\dfrac{1-i}{2}\right)^{476}$.

Esercizio 2. Calcolare il prodotto di matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e determinarne il rango[1].

Esercizio 3. Dire, motivando la risposta, se i seguenti 5 vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

formano un insieme di generatori.

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare

$$F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

definita in coordinate da

$$F(x,y,z,w) = (x-y, y-z, z-w).$$

Descrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alle basi canoniche[2]. Determinare una base del nucleo di F.

Esercizio 5. Sia $v_1, \dots, v_n$ una base di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$. Dimostrare che per ogni vettore $v \in V$ esiste $t \in \mathbb{K}$ tale che i vettori

$$v_1, \dots, v_{n-1}, v + tv_n$$

sono linearmente dipendenti. Dire inoltre se un tale t è unico.

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ dei polinomi di grado minore od uguale a 3, calcolare la dimensione del sottospazio V formato dai polinomi tali che $p(0) = p(1) = p(2) = p(3)$.

[1] Il rango di una matrice è, per definizione, uguale al massimo numero di colonne linearmente indipendenti.
[2] ossia, tale che $F = L_A$ nelle notazioni dell'Abate