11 giugno 2008

Indice

1 INTRODUZIONE SU CATEGORIE E FUNTORI (è solo l'inizio...)

In matematica una *categoria* è una struttura dotata di due componenti (oggetti e morfismi) che formalizza la nozione intuitiva di *contesto*. Più precisamente, una categoria $\mathcal{C}$ è data da:

1. Una collezione di elementi detti *oggetti* della categoria,
2. Un insieme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, per ogni coppia X,Y di oggetti di $\mathcal{C}$, i cui elementi sono detti *morfismi* tra X e Y; se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ allora si scrive $f\colon : X \to Y$. Inoltre dati $X, Y, Z, \in \mathcal{C}$ si ha una legge di composizione

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

Tale composizione deve essere associativa, ovvero, dati $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, e $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, si ha $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Bisogna poi che esista, per ogni oggetto X un morfismo, $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ che agisca come l'identità sia a destra che a sinistra per la composizione di morfismi.

La collezione degli oggetti di $\mathcal{C}$ verrà indicata con $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, mentre la collezione dei morfismi di $\mathcal{C}$ verrà indicata con $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$.

Esempi.
1. In Algebra, i gruppi (visti come oggetti) formano una categoria insieme agli omomorfismi di gruppi. 2. Nel contesto della Topologia si considera la categoria $\mathcal{T}op$ che ha come oggetti spazi topologici e come morfismi le funzioni continue

L'introduzione del concetto di categorie permette di fare ordine nelle strutture di cui si viene a trattare, in particolare per evitare confusione e paradossi.

In molti casi è utile poter passare da un contesto ad un altro, ovvero da una categoria a un altra. Questi cambi di contesto (che rispettano la struttura di categoria) prendono il nome di *funtori*. Più precisamente, date due categorie $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, un funtore $F\colon \mathcal{C}_1 \rightsquigarrow \mathcal{C}_2$ associa ad ogni oggetto X di $\mathcal{C}_1$ un oggetto $F(X)$ di $\mathcal{C}_2$ e ad ogni morfismo $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}_1$ un morfismo

$F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ in $\mathcal{C}_2$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & \overset{F}{\rightsquigarrow} & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ Y & & F(Y) \end{tikzcd}$$

Devono inoltre valere le seguenti condizioni:

1. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, ovvero F rispetta le composizioni;
2. $F(1_X) = 1_{F(X)}$, ovvero F rispetta l'identità.

La collezione di tutti i funtori tra $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ si indica con $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}at}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$. Si può dotare $\mathcal{H}om_{\mathcal{C}at}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ di una naturale struttura di categoria definendo un morfismo tra due funtori F e G da $\mathcal{C}_1$ a$\mathcal{C}_2$) come una collezione di morfismi $\eta_X\colon F(X) \to G(X)$ in $\mathcal{C}_2$, uno per ogni oggetto X di $\mathcal{C}_1$, che rendano commutativi i diagrammi

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

per ogni morfismo $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}_1$. Un morfismo tra funtori viene anche detto *trasformazione naturale di funtori.*

2 SPAZI GENERALIZZATI E LEMMA DI YONEDA (famose der male...)

COSTRUZIONE DI $\hat{\mathcal{C}}$ E DEI FUNTORI h E h_X^{op}

Sia $\mathcal{C}$ una categoria, e *Set* la categoria degli insiemi. Definiamo

$$\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{H}om_{\mathcal{C}at}(\mathcal{C}^{op}, Set) = \{F\colon \mathcal{C}^{op} \rightsquigarrow Set,\ F \text{ funtore}\}.$$

La categoria $\hat{\mathcal{C}}$ è una categoria di funtori: ha per oggetti i funtori controvarianti[1] da $\mathcal{C}$ nella categoria degli insiemi e per morfismi le trasformazioni naturali di funtori. Il motivo per cui sono stati scelti i morfimi da $\mathcal{C}^{op}$ invece che da $\mathcal{C}$ tenteremo di chiarirlo in seguito.

[1] ovvero che invertono il verso dei morfismi, è a questo che si riferisce l'apice *op*, che sta per *opposto*

Adesso vogliamo confrontare la vecchia categoria $\mathcal{C}$ con la nuova categoria $\hat{\mathcal{C}}$ costruendo un funtore $h^{op} : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ che, come vedremo, immerge la vecchia categoria nella nuova. Per definizione di funtore e di $\hat{\mathcal{C}}$, per ogni oggetto X di $\mathcal{C}$, dobbiamo dare un funtore

$$h_X^{op} : \mathcal{C}^{op} \to Set$$

A livello degli oggetti il funtore h_X^{op} è definito da $h_X^{op}(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Per quanto riguarda i morfismi, dobbiamo associare ad ogni $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ un morfismo $h_X^{op}(f) \in \mathrm{Hom}_{Set}(h_X^{op}(Z), h_X^{op}(Y))$, ovvero un'applicazione di insiemi $h_X^{op}(f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$; poniamo $h_X^{op}(f) = f^*$, dove f^* indica la composizione con f, ovvero $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$, per ogni φ in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$. Adesso che abbiamo definito h_X^{op} dobbiamo verificare che sia effettivamente un funtore, ovvero che rispetta la composizione dei morfismi e manda l'identità nell'identità. Dobbiamo pertanto dimostrare che presi comunque Y, W e Z tra gi oggetti di $\mathcal{C}$, e prese comunque $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$, si ha che: $h_X^{op}(f \circ g) = h_X^{op}(g) \circ h_X^{op}(f)$ e che preso $1_Y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y)$ si ha che $h_X^{op}(1_Y) = 1_{h_X^{op}(Y)}$. Per dimostrare queste uguaglianze innanzitutto chiariamoci chi sono dominio e codominio:

$$h_X^{op}(f \circ g)\colon h_X^{op}(Z) \longrightarrow h_X^{op}(Y)$$

$$h_X^{op}(g) \circ h_X^{op}(f)\colon h_X^{op}(Z) \xrightarrow{h_X^{op}(f)} h_X^{op}(W) \xrightarrow{h_X^{op}(g)} h_X^{op}(Y)$$

Ora per dimostrare l'uguaglianza tra $h_X^{op}(f \circ g)$ e $h_X^{op}(g) \circ h_X^{op}(f)$ calcoliamo entrambe le funzioni su un elemento generico del loro dominio e verifichiamo che danno lo stesso risultato (anche per le uguaglianze che dovremo dimostrare in futuro adotteremo la stessa strategia). Si ha, per ogni $\varphi \in h_X^{op}(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$,

$$\begin{aligned}
(h_X^{op}(g) \circ h_X^{op}(f))(\varphi)) &= (h_X^{op}(g))((h_X^{op}(f)(\varphi)) \\
&= g^*(f^*(\varphi)) \\
&= (\varphi \circ f) \circ g \\
&= \varphi \circ (f \circ g) \\
&= (f \circ g)^*(\varphi) \\
&= (h_X^{op}(f \circ g))(\varphi)
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'azione di h_X^{op} sull'identità, si ha

$$h_X^{op}(1_Y)(\varphi) = 1_Y^*(\varphi) = \varphi \circ 1_Y = \varphi,$$

e dunque $h_X^{op}(1_Y) = 1_{h_X^{op}(Y)}$.

A questo punto, avendo mostrato che h_X^{op} è effettivamente un funtore controvariante da $\mathcal{C}$ a valori insiemi, abbiamo associato ad ogni oggetto di

$\mathcal{C}$ un oggetto di $\hat{\mathcal{C}}$. Per rendere $h^{op}\colon \mathcal{C} \rightsquigarrow \hat{\mathcal{C}}$ effettivamente un funtore dobbiamo definirlo anche sui morfismi, ovvero dato $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ dobbiamo definire $h_f^{op} \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X^{op}, h_Y^{op})$. Ricordiamo che h_f^{op} deve essere un morfismo di funtori: dunque dobbiamo dare per ogni Z oggetto di $\mathcal{C}$ un morfismo $h_{f,Z}^{op} \in \mathrm{Hom}_{Set}(h_X^{op}(Z), h_Y^{op}(Z))$ che verifichi le proprietà opportune. Ed ecco, nel nostro caso, la sua definizione:

$$h_{f,Z}^{op} = f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y)$$

dove $f_*(\varphi) = f \circ \varphi$. Ora dobbiamo verificare che h_f^{op} sia effettivamente un morfismo di funtori, ovvero preso comunque un morfismo $g\colon W \to Z$ in $\mathcal{C}$, il diagramma

$$\begin{tikzcd}
h_X^{op}(Z) \arrow[r, "h_{f,Z}^{op}"] \arrow[d, "h_X^{op}(g)"'] & h_Y^{op}(Z) \arrow[d, "h_Y^{op}(g)"] \\
h_X^{op}(W) \arrow[r, "h_{f,W}^{op}"] & h_Y^{op}(W)
\end{tikzcd}$$

commuti. Ma, per come abbiamo definito h^{op}, questo diagramma altro non è che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "g^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y) \arrow[d, "g^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X) \arrow[r, "f_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Y)
\end{tikzcd}$$

la cui commutatività è evidente, in quanto

$$g^*(f_*(\varphi)) = (f \circ \varphi) \circ g = f \circ (\varphi \circ g) = f_*(g^*(\varphi)).$$

"Last but not least" si deve verificare che h^{op} è un funtore, ovvero rispetta la composizione di morfismi e lídentità. Anche in questo caso la verifica si fa applicando, con santa pazienza, le definizioni. Per la composizione, siano $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Allora $f \circ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ e dobbiamo verificare che $h_{f\circ g}^{op} = h_f^{op} \circ h_g^{op}$, ovvero che per ogni oggetto W di $\mathcal{C}$ le due applicazioni

$$h_X^{op}(W) \xrightarrow{h_{g,W}^{op}} h_Y^{op}(W) \xrightarrow{h_{f,W}^{op}} h_Z^{op}(W)$$

e

$$h_X^{op}(W) \xrightarrow{h_{f\circ g,W}^{op}} h_Z^{op}(W)$$

coincidano. Se prendiamo un generico $\varphi \in h_X^{op}(W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$ abbiamo che:

$$h_{f\circ g,W}^{op}(\varphi) = (f \circ g) \circ \varphi = f \circ (g \circ \varphi) = (h_{f,W}^{op} \circ h_{g,W}^{op})(\varphi).$$

Per quanto riguarda l'identità, si ha, che per ogni oggetto W di $\mathcal{C}$,

$$h_{1_X,W}^{op}(\varphi) = 1_X \circ \varphi = \varphi = 1_{h_X^{op}(W)}(\varphi).$$

Concludiamo questo paragrfo con una definizione: un oggetto F di $\hat{\mathcal{C}}$ si dice *rappresentabile* se esiste un oggetto X di $\mathcal{C}$ tale che $F \simeq h_X^{op}$. In tal caso si dice che F è rappresentato da X.

UN PUNTO DI VISTA POSSIBILE
Un modo possibile di vedere le cose dette fino ad ora è il seguente: il funtore h^{op} trasforma un oggetto X della nostra categoria di partenza nell'insieme di tutti i morfismi verso X. Possiamo scegliere di focalizzare la nostra attenzione sulle immagini di questi morfismi:[2] possiamo pensare che h_X^{op} manda l'oggetto Y nelle "copie o accartocciamenti di Y su X. Il vantaggio è il seguente: se X è molto semplice rispetto agli altri oggetti, invece di lavorare su oggetti complicati lavoriamo con le proiezioni di questi stessi oggetti su un oggetto più semplice; se X è molto complesso invece di lavorare direttamente su X lavoriamo con le proiezioni di oggetti più semplici su X. Il verso dei morfismi si inverte perchè se abbiamo un modo φ di copiare Y su X e un morfismo f da Z in Y, quello che naturalmente possiamo ottenere è un modo di copiare Z su X (cioè la composizione $\varphi \circ f$). Gli esempi che seguono sono stati pensati seguendo questo punto di vista.

ESEMPO SUGLI SPAZI VETTORIALI
Sia $\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}$ la categoria degli spazi vettoriali di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$, i cui morfismi sono le applicazioni lineari. Consideriamo lo spazio non banale più sempilce di tutti: quello di dimensione 1, ovvero il campo $\mathbb{K}$. Se ora W è uno spazio qualunque, $h_{\mathbb{K}}^{op}(W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}ect_{\mathbb{K}}}(W, \mathbb{K}) = W^*$, lo spazio duale di W. Grazie a questa costruzione invece di lavorare con vettori di W ci riduciamo a lavorare con vettori di $\mathbb{K}$, ovvero numeri. Questa costruzione inoltre preserva la struttura della categoria perciò, ad esempio, mi permette di ridurre la somma di due vettori a somma di numeri! (ritroviamo che lo spazio duale non è altro che lo spazio delle coordinate e che tutte le operazioni tra vettori si possono esprimere in coordinate).

ESEMPIO SUI GRUPPI.
Sia $\mathcal{G}rp$ la categoria dei gruppi, i cui morfismi sono gli omomorfismi tra gruppi. Ricordando che l'immagine di un gruppo mediante un omomorfismo è un sottogruppo del codominio, fissato un gruppo G, l'immagine di $\mathcal{G}rp$ attraverso il funtore h_G^{op} puo'essere pensata come il reticolo dei sottogruppi di G (con molte ripetizioni!).

SECONDO ESEMPIO SUI GRUPPI

[2] ad essere completamente rigorosi, un morfismo in una categoria astratta non è necessariamente un'applicazione e come tale non ha necessariamente un immagine, tuttavia in quasi tutti gli esempi che considereremo i morfismi saranno effettivamente particolari applicazioni tra insiemi; con un'eccezione notevole: nella categoria omotopica i morfismi non sono applicazioni ma classi di equivalenza di applicazioni!

Come caso particolare della costruzione mostrata nell'esempio precedente, prendiamo $G = SO(3,\mathbb{R})$. Il funtore $h^{op}_{SO(3,\mathbb{R})}$ calcolato su tutti i gruppi finiti dà l'insieme di tutti i poliedri platonici e tutti i poligoni regolari posizionati in tutti i modi possibili nello sapzio triimensionale (lasciando pero' il loro centro sempre coincidente con l'origine dello spazio).

IL LEMMA DI YONEDA

Siano ora X un oggetto di $\mathcal{C}$ ed $F : \mathcal{C} \rightsquigarrow Set$ un funtore controvariante, ovvero un oggetto di $\hat{\mathcal{C}}$, e sia $\varphi \colon h^{op}_X \to F$ una trasformazione naturale da h^{op}_X in F. Per definizione di trasformazione naturale, questo significa che per ogni morfismo $f \colon Y \to Z$ abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \arrow[r, "\varphi_Z"] \arrow[d, "h^{op}_X(f)"'] & F(Z) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \arrow[r, "\varphi_Y"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Ora possiamo considerare in particolare $\varphi_X \colon h^{op}_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) \longrightarrow F(X)$ e definire un elemento canonico di $F(X)$ come

$$\varphi_X(1_X) \in F(X)$$

In questo modo abbiamo definito un'applicazione

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h^{op}_X, F) &\to F(X)\\ \varphi &\mapsto \varphi_X(1_X).\end{aligned}$$

D'altro canto, per ogni u in $F(X)$ le applicazioni

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) &\xrightarrow{\tilde{u}_Y} F(Y)\\ f &\mapsto (F(f))(u)\end{aligned}$$

definiscono una trasformazione naturale tra h^{op}_X e F. Abbiamo in questo modo un'applicazione

$$\begin{aligned}F(X) &\to \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h^{op}_X, F)\\ u &\mapsto \tilde{u}.\end{aligned}$$

Le due applicazioni appena definite tra $F(X)$ e $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h^{op}_X, F)$ sono l'una l'inversa dell'altra. Per dimostrarlo prendiamo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h^{op}_X, F)$; allora per ogni morfismo $f \colon Y \to X$,

$$\widetilde{\varphi_X(1_X)}_Y(f) = (F(f))\,(\varphi_X(1_X))\,,$$

e dal diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "h_X^{op}(f)"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X) \arrow[r, "\varphi_Y"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

si vede che

$$F(f)\,(\varphi_X(1_X)) = \varphi_Y(h_X^{op}(f)(1_X)) = \varphi_Y(f^*(1_X)) = \varphi_Y(f).$$

Dunque

$$\widetilde{\varphi_X(1_X)} = \varphi.$$

Viceversa, sia $u \in F(X)$; allora

$$\tilde{u}_X(1_X) = (F(1_X))(u) = 1_{F(X)}(u) = u.$$

Abbiamo mostrato in tal modo una corrispondenza biunivoca naturale fra $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X^{op}, F)$ e $F(X)$; è qundi dimostrato il seguente (fondamentale) *lemma di Yoneda*:

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X^{op}, F) \simeq F(X)}$$

Ora è legittimo chiedersi come mai ci si sia imbarcati in una dimostrazione decisamente non semplice e che ci porta a una conclusione apparentemente lontana dalle nostre necesità. Il motivo fondamentale che ci ha spinto a farlo è il seguente corollario che dice che h^{op} è un funtore pienamente fedele, cioè copia con precisione $\mathcal{C}$ dentro $\hat{\mathcal{C}}$. Più formalmente, per ogni coppia di oggetti X ed Y in $\mathcal{C}$, h^{op} è una bigezione tra $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h^{op}(X), h^{op}(Y))$. Si ha infatti:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) = h_Y^{op}(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X^{op}, h_Y^{op}).$$

L'isomorfimo è dato da $f \mapsto \tilde{f}$; d'altra parte per ogni $g\colon Z \to X$ si ha

$$\tilde{f}_Z(g) = (h_Y^{op}(g))(f) = g^*(f) = f \circ g = f_*(g) = h_{f,Z}^{op}(g)$$

dunque l'isomorfismo tra $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X^{op}, h_Y^{op})$ è dato proprio da h^{op}.

Il lemma di Yoneda mi garantisce che h^{op} sia pienamenta fedele, cioe che $\hat{\mathcal{C}}$ contenga una copia di $\mathcal{C}$. Ma l'astuto Yoneda mi dice molto di più, infatti dire $F(X) = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X^{op}, F)$, per ogni F oggetto di $\hat{\mathcal{C}}$, significa dire che , preso un oggetto qualunque anche non rappresentabile di $\hat{\mathcal{C}}$, posso in un certo senso pensarlo come oggetto di $\mathcal{C}$ dicendo che $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,F)$"="$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X^{op}, F)$. In Altre parole penso a $F(X)$ come ai morfismi da X verso F; con quest'abuso di notazione in mente scrivo $f\colon X \to F$ per indicare un elemento $f \in F(X)$. Questa notazione nascone un punto di vista importante: se $F\colon \mathcal{C}^{op} \rightsquigarrow Set$ è un funtore controvariante, F va sempre pensato come un oggetto "generalizzato" di $\mathcal{C}$ e l'insieme $F(X)$ va sempre pensato come l'insieme dei morfismi da X *verso* F. Un ultimo abuso di notazione: poiché il lemma di Yoneda mi dice che h^{op} immerge $\mathcal{C}$ in $\hat{\mathcal{C}}$, posso identificare X con la sua immagine h^{op}_X. Per questa ragione da qui in avanti scriveremo semplicemnte X per indicare il funtore h^{op}_X, ovvero

$$X(Y) = h^{op}_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

L'insieme $X(Y)$ viene detto insieme degli Y*-punti* di X. Questo nome diventa chiaro non appena si pensi a cosa accade quando X è uno spazio topologico e Y lo spazio topologico costituito da un solo punto...

Notiamo che con questa notazione, il corollario del lemma di Yoneda ci dice che

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

ovvero che *i morfismi tra X ed Y pensati come oggetti generalizzati sono tutti e soli i morfismi tra X ed Y come oggetti della categoria originale.* Ad esempio, se X ed Y sono spazi topologici, possiamo pensarli anche come spazi topologici generalizzati, ma i misteriosi morfismi di spazi topologici generalizzati tra X ed Y altro non solo che le applicazioni continue tra X ed Y. Come si vede, nulla di misterioso...
Osserviamo infine che l'identificazione tra $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(X, Y)$ data dal lemma di Yoneda ci dice in particolare che X e Y sono isomorfi come oggetti generalizzati (ovvero come oggetti di $\hat{\mathcal{C}}$) se e solo se sono isomorfi come oggetti di $\mathcal{C}$.

LO SPAZIO DEI MORFISMI $Hom(X, Y)$

Esiste un modo canonico di pensare $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ come un oggetto di $\hat{\mathcal{C}}$, a patto che nella categoria di partenza $\mathcal{C}$ si possa fare il prodotto di oggetti: promuoviamo l'insieme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dei morfismi tra X ed Y ad un funtore $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)\colon \mathcal{C}^{op} \rightsquigarrow Sets$. Sugli oggetti, il funtore $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ è definito come segue:

$$\big(\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)\big)(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Z, Y)$$

L'azione di $\big(\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ è invece la seguente: se $f\colon Z \to W$,

$$\big(\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)(f) = (1_X \times f)^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times W, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Z, Y).$$

E' immediato verificare che $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ rispetta la composizione di morfismi e l'identità:

$$(1_X \times (f \circ g))^* = (1_X \times g)^* \circ (1_X \times f)^*,$$

$$(1_X \times 1_Z)^* = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Z, Y)},$$

dunque $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ è effettivamente un funtore controvariante su $\mathcal{C}$ a valori insiemi, ovvero un elemento di $\hat{\mathcal{C}}$. I motivi per cui scegliamo di realizzare $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ come funtore in questo modo saranno chiariti meglio nella sezione di topologia; per ora limitiamoci dire che nonostante l'apparenza molto astratta quello appena descritto è il medoto più intuitivo: orientativamente equivale a dire: penso una successione di funzioni $f_n(x)$ come un'unica funzione di due variabili $f(n,x)$.

Una volta trasformato $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ in un oggetto di $\hat{\mathcal{C}}$ possiamo, ad esempio, parlare di morfismi tra $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Z)$ come se questi fossero oggetti della mia categoria di partenza: i loro morfismi saranno i loro morfismi in $\hat{\mathcal{C}}$. Per essere precisi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,Z)$ sono oggetti generalizzati e i loro morfismi sono morfismi generalizzati, ma si e sostanzialmente autorizzati a confondere i due concetti.[3] Alcuni dei numerosi vantaggi che questo tipo di approccio dà saranno messi in luce nelle sezioni successive.

3 LA TAZZA E LA CIAMBELLA (ovvero la concretezza del geometra)

<u>*Nota al lettore*</u>. In questo paragrafo utilizzeremo due diverse notazioni per indicare le applicazioni continue tra spazi topologici. Scriveremo:

1. $\mathbf{C}(X,Y)$ per indicare l'<u>insieme</u> delle applicazioni continue da X in Y;
2. $\mathbf{Mappe}(X,Y)$ per sottolinearne la natura <u>funtoriale</u>.

Le motivazioni che ci spingono a questa scelta appariranno presto chiare.

In questa sezione ci proponiamo di affrontare un particolare e significativo esempio nell'ambito della teoria delle categorie: quello degli spazi topologici, alias categoria **Top**. Alla persona coerente sarà certamente sorta la domanda: “Ma perché abbiamo dovuto scomodare concetti così astratti?”. Ebbene, tutto questo ambaradan ci permetterà di :

1. definire in maniera estremamente intuitiva la nozione di *omotopia* (vedi paragrafo successivo), considerando l'insieme $\mathbf{Mappe}(X,Y)$ come se fosse dotato di struttura topologica (cioè considerandolo come spazio topologico generalizzato)

2. dimostrare risultati notevoli in contesto omotopico senza sforzo eccessivo, o meglio occultando tutte le difficoltà tecniche dietro un formalismo particolarmente elgante ed intuitivo.

[3] è proprio questa l'essenza del lemma di Yoneda.

Fatto questo preambolo, passiamo al nocciolo della questione, traducendo le nozioni del paragrafo precedente in termini topologici. In primis richiamiamo il funtore dell' *immersione di Yoneda*:

$$\mathbf{Top} \xrightarrow{h^{op}} \widehat{\mathbf{Top}} \stackrel{DEF}{=} \{\mathbf{Top}^{op} \to \mathbf{Set}\}$$

così definito:

$$X \mapsto h_X^{op}$$

Ora ci domandiamo se sia in generale possibile pensare a $\mathbf{C}(X, Y)$ come ad uno spazio topologico. Subito ci balena un'idea: è possibile dotare $\mathbf{C}(X, Y)$ esplicitamente di una topologia (sensata)? La risposta è sì! Questa topologia è detta compatta-aperta. Non è nostra intenzione costruire "a mano" questa topologia, ma notiamo che essa, per possedere buone proprietà, richiede che X sia *localmente compatto di Hausdorff.* Ora pensiamo al *Lemma di Yoneda*: esso ci dice che possiamo identificare un generico X oggetto di $\mathbf{Top}$ con il funtore h_X^{op} che è un oggetto di $\widehat{\mathbf{Top}}$. Cioè, dotando l'insieme $\mathbf{C}(X, Y)$ della topologia compatta-aperta (e rendendolo dunque un oggetto di $\mathbf{Top}$), esso diventa un oggetto *rappresentabile* in $\widehat{\mathbf{Top}}$.
Consideriamo ora un generico funtore $F \in \widehat{\mathbf{Top}}$ (non necessariamente rappresentabile): ci chiediamo se non sia possibile in qualche modo pensarlo come uno spazio topologico. In effetti è lo stesso *Lemma di Yoneda* a suggerire questa generalizzazione: esso, infatti, ci garantisce l'esistenza del seguente isomorfismo:

$$F(X) \simeq \mathbf{Hom}_{\widehat{\mathbf{Top}}}(h_X^{op}, F) = \{h_X^{op} \to F\}$$

Perciò, considerando l'identificazione

$$X \quad \text{“} =\text{''} \quad h_X^{op}$$

otteniamo:

$$F(X) \quad \text{“} =\text{''} \quad \{X \to F\}$$

Ovviamente il termine a destra dell'identificazione rappresenta un insieme di morfismi tra *funtori.* Il significato intuitivo dell'uguaglianza appena scritta è il seguente: posso pensare F come uno spazio topologico per il quale non so dire cos'è un aperto (a rigori F *non è* uno spazio topologico! e dunque non ha alcun senso parlare dei suoi aperti) ma so dare un significato alla nozione di *funzione continua da uno sapzio topologico X verso F*. In effetti ricordiamo che una notevole conseguenza del Lemma di Yoneda è la seguente: identificando X col funtore h_X^{op} si ha:

$$\mathbf{Hom}_{\widehat{\mathbf{Top}}}(X, Y) = \mathbf{Hom}_{\widehat{\mathbf{Top}}}(h_X^{op}, h_Y^{op}) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) = \mathbf{C}(X, Y).$$

Vale a dire che siamo in grado di identificare le applicazioni continue in $\mathbf{Top}$ con quelle funtoriali in $\widehat{\mathbf{Top}}$. A questo punto possiamo facilmente pensare agli oggetti di **Top** come ad una generalizzazione del concetto di spazio topologico e dunque considerare *applicazioni continue* in $\widehat{\mathbf{Top}}$, che, d'ora in avanti, chiameremo categoria degli spazi topologici *generalizzati*. Orgogliosi del risultato ottenuto, torniamo al caso interessante: quello di $\mathbf{Mappe}(X, Y)$. L'affermazione cruciale è la seguente: *possiamo pensare alle applicazioni continue da X a Y come ad un funtore controvarinate su **Top** a valori insiemi (ovvero un oggetto di $\widehat{\boldsymbol{Top}}$) cioè come ad uno spazio topologico generalizzato!* Per far ciò ricordiamo la seguente definizione, già vista nel precedente capitolo in forma astratta:

$$\mathbf{Mappe}(X, Y)(Z) \stackrel{DEF}{=} \mathbf{C}(Z \times X, Y)$$

Per le osservazioni precedenti risulta inoltre che:

$$\mathbf{Mappe}(X, Y)(Z) \quad \text{``}='' \quad \{Z \to \mathbf{Mappe}(X, Y)\}$$

Dunque, mettendo tutto insieme, possiamo finalmente pensare al funtore $\mathbf{Mappe}(X, Y)$ come ad uno *spazio topologico generalizzato* ed abbiamo, inoltre, dato un senso alla nozione di *applicazione continua tra spazi di mappe, o tra uno spazio topologico ed uno spazio di mappe.* La funtorialità di $\mathbf{Mappe}(X, Y)$ è già stata dimostrata in genrale nella sezione precedente; qui limitiamoci ad aggiungere la seguente osservazione che ci aiuta a convincerci della bontà della definizione che abbiamo dato: scrivendo esplicitamente quali sono i punti dello spazio generalizzato $\mathbf{Mappe}(X, Y)$ troviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{Mappe}(X, Y)(\{*\}) &= \{\{*\} \to \mathbf{Mappe}(X, Y)\} \\ &\stackrel{DEF}{=} \mathbf{C}(\{*\} \times X, Y) \\ &= \mathbf{C}(X, Y). \end{aligned}$$

Ritroviamo cioè precisamente quello che ci aspettavamo, vale a dire che gli elementi di $\mathbf{Mappe}(X, Y)$ sono esattamente le applicazioni continue da X a Y.

4 GIOCHIAMO CON GLI ELASTICI deformazioni di spazi e cammini

Un concetto fondamentale (e fortunatamente anche abbastanza intuitivo) della topologia è quello di *deformazione con continuità* (di spazi, di applicazioni, di cammini, etc...). Spesso può essere interessante cercare di comprendere cosa succede ad uno spazio, o ad un arco, se esso viene deformato in modo continuo e senza strappi, un po' come se fosse fatto di gomma. Tale concetto si formalizza con la nozione di **omotopia**.

Definizione : Date due applicazioni continue f_0, f_1 in $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,Y)$, f_0 e f_1 si dicono *omotope* se esiste un'applicazione continua $f\colon [0,1]\times X \longrightarrow Y$ tale che $f(0,x) = f_0(x)$ e $f(1,x) = f_1(x)$ per ogni $x \in X$.
Col linguaggio degli spazi topologici generalizzati introdotto nella sezione precedente possiamo dire che due applicazioni continue da X in Y sono omotope se e solo se sono estremi di un arco in $\mathbf{Mappe}(X,Y)$. Infatti, dal momento che $\{Z \to \mathbf{Mappe}(X,Y) = (\mathbf{Mappe}(X,Y))\,(Z) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Z\times X, Y)$, abbiamo proprio che un'applicazione continua (generalizzata)

$$f\colon [0,1] \to \mathbf{Mappe}(X,Y)$$

è un'applicazione continua

$$f\colon [0,1]\times X \to Y$$

In pratica diciamo che la famiglia di applicazioni continue f_t dipende con continuità dal parametro t se l'applicazione $f(t,x) = f_t(x)$ è un'applicazione continua nelle variabili (t,x).
Osservazione. Dal fatto che essere applicazioni omotope equivale ad essere estremi di un arco in $\mathbf{Mappe}(X,Y)$ segue immediatamente che essere applicazioni omotope è una relazione di equivalenza, che denoteremo con $\sim$.
Notazione. Indichiamo con $[X,Y]$ l'insieme delle classi di omotopia di applicazioni continue da X in Y. Vale a dire $[X,Y] = \mathbf{Mappe}(X,Y) = \pi_0(\mathbf{Mappe}(X,Y))$, dove al solito $\pi_0(A)$ indica l'insieme delle componenti connesse per archi dello spazio topologico A.
Osservazione. Se A e B sono spazi topologici allora:

1. Un'applicazione continua $f\colon A \to B$ induce un'applicazione al quoziente $\pi_0(f)\colon \pi_0(A) \to \pi_0(B)$ definita da $\pi_0(f)([a]) = [f(a)]$ per ogni $a \in A$
2. $\pi_0(A\times B) = \pi_0(A)\times\pi_0(B)$

Questi due fatti rimangono validi per gli spazi topologici genralizzati. In particolare, dalla composizione

$$\mathbf{Mappe}(Y,Z)\times\mathbf{Mappe}(X,Y) \to \mathbf{Mappe}(X,Z)$$

otteniamo, passando ai π_0 una composizione

$$[Y,Z]\times[X,Y] \to [X,Z]$$

Attraverso questa definizione, ció che abbiamo ottenuto è una nuova categoria, detta *categoria omotopica*, insieme con un funtore dalla categoria degli spazi topologici nella categoria omotopica:

$$\mathbf{Top} \rightsquigarrow \mathbf{HoTop}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "{[f]}"] \\ Y & Y \end{tikzcd}$$

Più precisamente, si ha Ob(**Top**) = Ob(**HoTop**) = {spazi topologici}; Mor(**Top**) = {applicazioni continue}; Mor(**HoTop**) = {classi di omotopia di applicazioni continue}. In particolare, otteniamo che se due spazi sono isomorfi in **Top**, allora lo sono anche in **HoTop** (in generale il viceversa non è vero)

Definizione. Due spazi topologici X ed Y si dicono *omotopicamente equivalenti* se sono isomorfi come oggetti di **HoTop** , cioé se esistono

$$[f] : X \longrightarrow Y \ \ , \ [g] : Y \longrightarrow X$$

t.c.

$$[f \circ g] = [1_Y]$$

e

$$[g \circ f] = [1_X]$$

Definizione. Uno spazio topologico si dice *contrattile* (o contraibile) se è omotopicamente equivalente ad un punto. In particolare, se X è contraibile l'identità $1_X : X \to X$ é omotopa ad un'applicazione costante.

Definizione. Sia Y uno sapzio topologico e sia $X \subseteq Y$ un suo sottospazio; indichiamo con $i: X \hookrightarrow Y$ l'inclusione di X in Y. Una *retrazione* di Y su X é un inverso a sinistra di i, cioè è $r: Y \to X$ tale che $r \circ i = id_X$; lo spazio X si dice *retratto* di Y. In particolare, se $x \in X$ si ha $r(x) = x$. In poche parole, una retrazione un'applicazione continua che porta tutto Y in X lasciando fissi tutti i punti di X.
Definizione. Il sottospazio X di Y é un *retratto per deformazione* di Y se l'inclusione i è un'equivalenza omotopica relativamente al sottospazio X, ovvero se esiste un arco tra 1_Y e $i \circ r$ nello spazio $\mathbf{Mappe}_{i\colon X \hookrightarrow Y}(Y, Y)$ delle applicazini continue da Yin sè che ristrette ad X sono l'immersione di X in Y. In altre parole chiediamo che esista un'applicazione continua $R: [0, 1] \times Y \to Y$ tale che

1. $R(0, y) = r(y)$ e $R(1, y) = y$ per ogni $y \in Y$
2. $R(t, x) = x$, per ogni $x \in X$ed ogni $t \in [0, 1]$.

Un retratto per deformazione, quindi, è un retratto in cui la contrazione di Y su X avviene con continuità.
Cerchiamo di capire con un esempio cosa stiamo facendo. Il semplice fatto di allargare o restringere uno spazio mi dà la possibilità di controllare oggetti che non conosco identificandoli con oggetti che invece conosco.

Esempio. Un *bouquet di k n-sfere* (ebbene sì, si chiama così...) sono k copie di S^n attaccate in un punto. Ora prendo un quadrato, che chiamo A, con bordo. Tolgo un qualunque punto interno ad A. Che cosa ottengo? Bene, avendo tolto un punto posso retrarre tutto lo spazio sul bordo (immaginate di mettere le dita nel microscopico forellino che ottenete togliendo il punto e tirare verso l'esterno...). Quello che viene fuori è semplicemente una copia di S^1 (cui il bordo del quadrato è omeomorfo, come tutti ben sappiamo). E se invece di un punto ne tolgo due? Applico lo stesso procedimento, e quello che ottengo è il bordo di un quadrato con due dei lati opposti uniti da un segmento. Il che nella categoria omotopica é esattamente la stessa cosa di un bouquet di due S^1!!! E se ne tolgo k? A questo punto, anche i meno perspicaci avranno capito come funziona... ovviamente otterrò un bouquet di k S^1. Se anziché un quadrato fossi particto con un cubo avrei ottenuto un bouquet di k S^2; in generale, lo spazio che si ottiete togliendo k punti interni ad un cubo $(n+1)$-dimensionale è omotpicamente equivalente ad un bouquet di k n-sfere.

5 GRUPPI E GRUPPOIDI Il gruppoide di Poincaré e il primo gruppo di omotopia

Sia X uno spazio topologico, e siano x_0, x_1 punti di X. Definiamo

$$\Omega(X, x_0, x_1) := \mathbf{Mappe}_{\substack{0 \mapsto x_0 \\ 1 \mapsto x_1}}([0,1], X)$$

cioè lo spazio dei cammini in X di punto iniziale x_0 e punto finale x_1. L'insieme dei punti di $\Omega(X, x_0, x_1)$ è chiaramente,

$$\{\alpha : [0,1] \to X \text{ con } \alpha(0) = x_0,\ \alpha(1) = x_1\}$$

Definizione.

$$\Pi_X(x_0, x_1) := \pi_0(\Omega(X, x_0, x_1))$$

si chiama *gruppoide di Poincaré* di X.

Ossevazione. Consideriamo lo spazio topologico $X = [0,1]$, e prendiamo $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$. Allora $\Pi_X(0,1)$ consiste di un solo elemento. Infatti, prese $f_0, f_1 : [0,1] \to [0,1]$ con $f_0(0) = f_1(0) = 0$ e $f_0(1) = f_1(1) = 1$, esiste $f_t : [0,1] \to [0,1]$ con estremi f_0 e f_1 (e con $f_t(0) = 0$, $f_t(1) = 1$ per ogni t in $[0,1]$). Basta prendere come f_t la combinazione convessa di f_0 e f_1, ovvero

$$f_t(x) = (1-t) f_0(x) + t f_1(x).$$

Come corollario immediato di questa osservazione abbiamo che tutte le diverse parametrizzazioni di uno stesso arco sono omotopicamente equivalenti tra loro.

- Fino a qui -

Prodotto di cammini Definiamo un prodotto

$$\begin{aligned} \Omega(X, x_0, x_1) \times \Omega(X, x_1, x_2) &\to \Omega(X, x_0, x_2) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha * \beta \end{aligned}$$

nel seguente modo:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ \beta(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Se α_t è una omotopia tra α_0 e α_1 e β_t una omotopia tra β_0 e β_1, allora $\alpha_t * \beta_t$ è una omotopia tra $\alpha_0 * \beta_0$ e $\alpha_1 * \beta_1$. ne segue che il prodotto di composizione di cammini appena definito induce un prodotto

$$\begin{aligned} \Pi_X(x_0, x_1) \times \Pi_X(x_1, x_2) &\to \Pi_X(x_0, x_2) \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto [\alpha * \beta] \end{aligned}$$

Inoltre, dati tra cammini α, β e γ tali che la loro composizione sia definita, si ha

$$(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma),$$

in quanto questi due cammini differiscono solamente per la parametrizzazione ed abbiamo visto prima che un cambio di parametrizzazione lascia invariata la classe di omotopia. Quindi il prodotto di composizione delle classi di omotopia di cammini é associativo. Infine la classe di omotopia $[1_x]$ del cammino cotantemente uguale ad x è un elmento di $\Pi_X(x, x)$ che fa da elemento neutro sia a destra che a sinistra rispetto alla composizone di classi di omotopia di cammini. Ne segue che Π_X ha una naturale struttura di *categoria*; gli oggetti di Π_X sono i punti di X, i morfismi tra x_1 ed x_2 sono le classi di omotopia di cammini da x_1 ad x_2.
Inverso di un cammino Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} \Omega(X, x_1, x_2) &\to \Omega(X, x_2, x_1) \\ \alpha &\mapsto \mathrm{inv}\alpha \end{aligned}$$

dove il cammino invα è definito da

$$(\mathrm{inv}\alpha)(t) = \alpha(1-t).$$

Si ha:

$$\alpha * (\text{inv}\alpha) \sim 1_{x_1}$$

$$(\text{inv}\alpha) * \alpha \sim 1_{x_2}$$

Dunque la classe di omotopia $[\text{inv}\alpha] \in \Pi_X(x_2, x_1)$ è l'inversa di $[\alpha] \in Pi_X(x_1, x_2)$. In particolare tutti i morfisli nella categoria Π_X sono invertibili, ovvero Π_X è un *gruppoide* (il che spiega il nome 'gruppoide di Poincaré' col quale abbiamo indicato Π_X all'inizio di questa sezione).
Cosa succede se consideriamo cammmini che cominciano e finiscono in uno stesso punto? $\Pi_X(x, x)$ é un gruppo, e si chiama *gruppo fondamentale* o *primo gruppo di omotopia* di X con punto base x. Lo indicheremo col simbolo $\pi_1(X; x)$. Vale a dire, per definizione,

$$\pi_1(X; x) = \Pi_X(x, x).$$

Osserviamo che se X è connesso per archi tutti i gruppi fondamentali $\pi_1(X; x)$ sono isomorfi tra loro; un isomorfismo tra $\pi_1(X; x_1)$ e $\pi_1(X; x_2)$ è dato dal coniugio per (la classe di omotopia di) un arco tra x_1 e x_2.
Definizione. Uno spazio topologico X connesso per archi si dice *semplicemente connesso* se $\pi_1(X, x)$ è banale (ovvero è il gruppo costituito da un solo elemento).

6 RIVESTIMENTI E SOLLEVAMENTI e non finisce qua...

Sia X uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi. Un'applicazione continua e suriettiva $\pi : \tilde{X} \to X$ si chiama *rivestimento* di X se per ogni x in Xesiste un intorno U tale che $\pi^{-1}(U)$ sia omeomorfo a $U \times F$, con F spazio topologico discreto, mediante un omeomorfismo che renda commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "p_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

dove $p_1 : U \times F \to U$ è la proiezione sul primo fattore.

Se, per ogni x in X si ha $\left|\pi^{-1}(x)\right| = n$ finito, allora diremo che il rivestimento ha grado n .
Sia ora $\pi : \tilde{X} \to X$ un rivestimento, e $f : Y \to X$ un'applicazione continua. Un *sollevamento* di f é un'applicazione continua $g : Y \to \tilde{X}$ che renda

commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

7 AZIONI PROPRIAMENTE DISCONTINUE (un ultimo sforzo...)

Sia G un gruppo (topologico) discreto, e $G \times \tilde{X} \to \tilde{X}$ un'azione (continua). Si dice che G agisce in modo *propriamente discontinuo* se per ogni $\tilde{x}$ in $\tilde{X}$ esiste un intorno U tale che $U \cap g \cdot U = \emptyset$ per ogni $g \in G$ con $g \neq e$.
Teorema : Siano $\tilde{X}$ uno spazio topologico semplicemente connesso e localmente connesso per archi e G un gruppo topologico discreto che agisce su $\tilde{X}$ in modo propriamente discontinuo. Detto X il quoziente $\tilde{X}/G$, si ha che $\pi_1(X;x) \simeq G$, per ogni $x \in X$.
Dimostrazione. Siano x un punto di x e $\tilde{x}$ una sua controimmagine mediante π. Vogliamo mostrare che esiste un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \Omega(X,x,x) \arrow[r, "\text{sollevamento}"] \arrow[d, "\pi_1"] & \Omega(\tilde{X},\tilde{x},\pi^{-1}(x)) \arrow[r, "ev_1"] & \pi^{-1}(x) \arrow[r, "\sim"] & G \\ \pi_1(x) \arrow[urrr, "\sim", "\varphi"'] & & & \end{tikzcd}$$

in cui φ è un *isomorfismo di gruppi.*

Al solito, pensiamo agli spazi topologici generalizzati $\Omega(X,x,x)$ e $\Omega(\tilde{X},\tilde{x},\pi^{-1}(x))$ come ordinari spazi topologici , e parliamo di mappe continue fra $\Omega(X,x,x)$ e $\Omega(\tilde{X},\tilde{x},\pi^{-1}(x))$ intendendo con queste delle trasformazioni naturali tra funtori.
Siano $\alpha \in \Omega(X,x,x)$ un cammino chiuso di punto base x e $[\alpha]$ la sua classe di omotopia nel gruppo fondamentale. Indichiamo con $\tilde{\alpha}$ il cammino (esiste ed è unico) in $\tilde{X}$ che solleva α con punto iniziale $\tilde{x}$ ed indichiamo con $\underline{\tilde{x}}$ il punto finale del cammino $\tilde{\alpha}$. In generale $\tilde{x} \neq \underline{\tilde{x}}$, ma sia $\tilde{x}$ che $\underline{\tilde{x}}$ appartengono a $\pi^{-1}(x)$. Si puó dunque considerare il sollevamento di cammini come un'applicazione da $\Omega(X,x,x)$ in $\Omega(\tilde{X},\tilde{x},\pi^{-1}(x))$, che porta il cammino α nel cammino $\tilde{\alpha}$. Questa applicazione è continua. L'applicazione $ev_1 : \Omega(\tilde{X},\tilde{x},\pi^{-1}(x)) \to \pi^{-1}(x)$ é la valutazione del cammino $\tilde{\alpha}$ in 1. Si tratta anche in questo caso di un'applicazione continua. Dato che la composizione di applicazioni contiunue è continua, l'applizione $\Omega(X,x,x) \to \pi^{-1}$ che siamo venuti a definire è continua. Ma $\pi^{-1}(x)$ ̀discreto in quanto $\pi\colon \tilde{X} \to X$ è un rivestimento. Ne segue che l'applicazione $\Omega(X,x,x) \to \pi^{-1}$ è costante sulle componenti connesse per archi di $\Omega(X,x,x)$ ed induce pertanto un'applicazione al quoziente $\pi_1(X;x) = \pi_0(\Omega(X,x,x)) \to \pi^{-1}(x)$. Resta da

identificare $\pi^{-1}(x)$ con G, ma questo è immediato: poiché l'azione di G su $\tilde{X}$ è propriamente discontinua, l'applicazione

$$\begin{aligned} G &\to \pi^{-1}(x) \\ g &\mapsto g \cdot \tilde{x} \end{aligned}$$

è una biiezione (ed essendo sia G che $\pi^1(x)$ discreti è in effetti un omeomorfismo). L'applicazione $\varphi\colon \pi_1(X;x) \to G$ che risulta così definita è pertanto $[\alpha] \mapsto g_{[\alpha]}$ dove $g_{[\alpha]}$ è l'unico elemento di G tale che

$$g_{[\alpha]} \cdot \tilde{x} = \tilde{\alpha}(1).$$

È faciel mostrare che φ è un omomorfismo di gruppi. Inoltre dalla connessione per archi di $\tilde{X}$ segue che φ è suriettivo, mentre dalla semplice connessione di $\tilde{X}$ segue che φ è iniettivo.

Esiste un'interessante caratterizzazone del gruppo fondamentale $\pi_1(X, x)$, con $X = \tilde{X}/G$. Si può infatti provare che

$$G \simeq \mathrm{Deck}(\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X)$$

dove $\mathrm{Deck}(\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X)$ è il gruppo degli automorfismi di $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ nella categoria dei rivestimenti di X. Ricordiamo che un morfismo nella categoria dei rivestimenti di X è un diagramma commutativo del tipo

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Riferimenti bibliografici

[1] M. Manetti, Topologia, Springer-Verlag