**Il teorema di Cayley-Hamilton**

Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$, sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo di $\varphi$ e sia $p_\varphi(t)$ il polinomio caratteristico di $\varphi$. Allora $p_\varphi(\varphi) = 0$.

Innanzi tutto osserviamo che non è restrittivo supporre che tutti gli autovalori di $\varphi$ siano in $\mathbb{K}$: se non lo sono, possiamo sempre pensare di lavorare in un campo più grande che li contenga. Ad esempio, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico $p_\varphi(t)$ è un polinomio a coefficienti reali, e sicuramente tutte le sue radici sono contenute nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Sia $n$ la dimensione di $V$ e indichiamo con $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ le radici (non necessariamente distinte) del polinomio caratteristico $p_\varphi(t)$. Allora

$$p_\varphi(t) = (-1)^n(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n)$$

e il teorema di Cayley-Hamilton si riduce a dimostrare che la composizione

$$(\varphi - \lambda_1 \mathrm{Id}_V)(\varphi - \lambda_2 \mathrm{Id}_V) \cdots (\varphi - \lambda_n \mathrm{Id}_V)$$

manda tutto $V$ in 0.

Ricordiamo che se tutti gli autovalori sono in $\mathbb{K}$, come stiamo supponendo, ogni endomorfismo si può mettere in forma triangolare superiore, ovvero esiste una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2 \ldots, e_n\}$ di $V$ rispetto alla quale $\varphi$ è rappresentato da una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Il significato geometrico di questa forma della matrice è il seguente: per ogni $i$ tra 0 ed $n$ indichiamo con $V_i \subseteq V$ il sottspazio genereato dai primi $i$ vettori della base $\mathcal{B}$. Abbiamo così una successione di sottospazi

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V.$$

Si dice che la collezione $\{V_i\}$ è una *filtrazione* sullo spazio vettoriale $V$. In questo caso particolare, dato che $\dim V_i = i$ si parla anche di *bandiera* (o bandiera completa) di sottospazi. Allora il significato gometrico della forma triangolare superiore è evidente:

$$\varphi(V_i) \subseteq V_i, \qquad \forall i,$$

ovvero $\varphi$ preserva la filtrazione (e il fatto che ogni endomorfismo di uno spaizo di dimensione finita si possa mettere in forma triangolare superiore non appena tutti gli autovalori sono in $\mathbb{K}$ si può esprimere dicendo che ogni tale endomorfismo ammette sempre una bandiera invariante di sottospazi).

Sempre guardando alla forma della matrice che rappresenta $\varphi$ nella base $\mathcal{B}$ vediamo anche che
$$(\varphi - \lambda_i \mathrm{Id}_V)(V_i) \subseteq V_{i-1}.$$
Ma allora
$$V = V_n \xrightarrow{\varphi - \lambda_n \mathrm{Id}_V} V_{n-1} \xrightarrow{\varphi - \lambda_{n-1} \mathrm{Id}_V} V_{n-2} \to \cdots \to V_1 \xrightarrow{\varphi - \lambda_1 \mathrm{Id}_V} V_0 = \{0\}$$
e il teorema è dimostrato.