1. Autospazi e autospazi generalizzati

Sia $\varphi\colon V \to V$ un endomorfismo. Allora l'assegnazione $x \mapsto \varphi$ induce un morfismo di anelli $\rho\colon \mathbb{K}[x] \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Più esplicitamente, al polinomio p dato da

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

viene associato l'endomorfismo

$$p(\varphi) = a_0 \mathrm{Id} + a_1 \varphi + \cdots + a_n \varphi^n,$$

dove, al solito, φ^n indica la composizione di φ con se stesso n volte.

Tutto questo ci suggerisce come sia opportuno pensare ad uno spazio vettoriale V con un endomorfismo distinto φ come un $\mathbb{K}[x]$-modulo. L'azione di $\mathbb{K}[x]$ su V è, ovviamente, $p \cdot v = (p(\varphi))(v)$.

Definizione 1.1. Dato un sottoinsieme S di V, scriviamo $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(S)$, e lo chiamiamo *annullatore in V di S*, per indicare l'insieme dei polinomi p tali che $p \cdot v = 0$ per ogni v in S. Analogamente, per ogni $S \subseteq \mathbb{K}[x]$ scriviamo $\mathrm{Ann}_V(S)$ per indicare l'insieme dei vettori v di V tali che $p \cdot v = 0$ per ogni p in S.

Si verifica immediatamente che $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(S)$ è un ideale di $\mathbb{K}[x]$ e che $\mathrm{Ann}_V(S)$ è un sottospazio di V. Inoltre, se $\langle S \rangle$ indica il sottospazio generato da S, si ha $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(S) = \mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(\langle S \rangle)$; analogamente, se (S) indica l'ideale generato da S, si ha $\mathrm{Ann}_V(S) = \mathrm{Ann}_V((S))$. Altrettanto immediato è osservare che prendere gli annullatori inverte il verso delle inclusioni: se $S_1 \subseteq S_2$ sono sottoinsiemi di V, allora $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(S_2) \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(S_1)$, e analogamente accade per i sottoinsiemi di $\mathbb{K}[x]$. In particolare, se p è un polinomio, alla catena decrescente di ideali di $\mathbb{K}[x]$

$$(1) \supseteq (p) \supseteq (p^2) \supseteq (p^3) \supseteq \cdots$$

corrisponde la catena crescente di sottospazi di V

$$\{0\} \subseteq \mathrm{Ann}_V(p) \subseteq \mathrm{Ann}_V(p^2) \subseteq \mathrm{Ann}_V(p^3) \subseteq \cdots$$

e poniamo

$$\mathrm{Ann}_V(p^\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ann}_V(p^n).$$

Più esplicitamente, un vettore v di V appartiene al sottospazio $\mathrm{Ann}_V(p^\infty)$ se e solo se $p^n \cdot v = 0$ per qualche $n \geq 0$. Possiamo dire qualcosa sull'andamento della successione crecente di sottospazi $\mathrm{Ann}_V(p^n)$:

Proposizione 1.2. *Sia p un polinomio e sia $n_p = \inf\left\{n \in \mathbb{N} \,:\, \mathrm{Ann}_V(p^n) = \mathrm{Ann}_V(p^{n+1})\right\}$, con la solita convenzione $n_p = \infty$ se questo insieme è vuoto. Allora* $\mathrm{Ann}_V(p^\infty) = \mathrm{Ann}_V(p^{n_p})$

Dimostrazione. L'enunciato è banale se $n_p = \infty$. Se invece n_p è un numero naturale, dimostriamo induttivamente che $\mathrm{Ann}_V(p^{n_p+k}) = \mathrm{Ann}_V(p_p^n)$ per ogni $k \geq 0$. Per $k = 1$ non c'è nulla da dimostrare, per definizione di n_p. Supponiamo allora di aver dimostrato l'enunciato per $k = k_0 \geq 1$ e dimostriamolo per $k = k_0 + 1$. Se $v \in \mathrm{Ann}_V(p^{n_p+k_0+1})$, allora $p^{n_p+k} \cdot (p \cdot v) = 0$. Dunque $p \cdot v \in \mathrm{Ann}_V(p^{n_p+k_0}) = \mathrm{Ann}_V(p^{n_p})$ per l'ipotesi induttiva. Ma allora $v \in \mathrm{Ann}_V(p^{n_p+1}) \subseteq \mathrm{Ann}_V(p^{n_p+k_0}) = \mathrm{Ann}_V(p^{n_p})$, dove abbiamo sfruttato la disuguaglianza $k_0 \geq 1$ e di nuovo l'ipotesi induttiva. Dal fatto che $\mathrm{Ann}_V(p^n) = \mathrm{Ann}_V(p_p^n)$ per ogni $n \geq n_p$ segue poi immediatamente la tesi. $\square$

Osservazione 1.3. In termini più colloquiali la proposizione precedente dice che la successione di sottospazi $\mathrm{Ann}_V(p^n)$ o è sempre strettamente crescente, oppure è strettamente crescente fino ad un certo punto n_p e da lì in poi si stabilizza (ovvero, è costante). Notiamo che se V ha dimensione finita solo la seconda di queste due possibilità può presentarsi.

Osservazione 1.4. Si può descrivere più in dettaglio l'andamento della successione strettamente crescente $\mathrm{Ann}_V(p^n)$ per $n \leq n_p$, ma per il momento non lo faremo.

Siamo interessati all'ideale $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(V)$ dei polinomi che annullano tutti i vettori di V. Ricordando come è definita l'azione di $\mathbb{K}[x]$ su V, si ha che $p \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(V)$ se e solo se $p(\varphi) = 0$. In altre parole, $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(V)$ è l'ideale di tutti i polinomi che si annullano su φ.

Osservazione 1.5. Si ha $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(V) = \ker\{\rho \colon \mathbb{K}[x] \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)\}$. Il morfismo di anelli ρ è anche un morfismo di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. In particolare, ne segue che se V ha dimensione finita $\ker \rho \neq \{0\}$. In altre parole, se V ha dimensione finita, $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(V) \neq \{0\}$ per ogni endomorfismo φ. Per uno spazio di dimensione infinita, invece, la condizione $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(V) \neq \{0\}$ può essere o meno soddisfatta, a seconda dell'endomorfismo φ preso in esame. Ad esempio, se V è lo spazio vettoriale delle funzioni continue su $\mathbb{R}$, l'endomorfismo lineare φ definito da $f(t) \mapsto f(-t)$ annulla il polinomio $p(x) = x^2 - 1$. Sullo stesso spazio, l'endomorfismo $f(t) \mapsto f(t+1)$ non è invece annullato da alcun polinomio non nullo.

Osservazione 1.6. E' utile introdurre la notazione

$$p \cdot V = \{p \cdot v \,:\, v \in V\}.$$

Vale a dire, $p \cdot V$ è l'insieme di tutti i vettori di V della forma $p \cdot v$, al variare di v in V; è immediato rendersi conto che $p \cdot V$ è un sottospazio di V. Si tratta, in effetti, dell'immagine del'endomorfismo $p(\varphi) \colon V \to V$. Con questa notazione, si ha

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(V) = \{p \in \mathbb{K}[x] \,:\, p \cdot V = \{0\}\,\}.$$

Notiamo anche che, presi comunque due polinomi p_1 e p_2, vale $p_1 p_2 \cdot V \subseteq p_1 \cdot V \cap p_2 \cdot V$.

Proposizione 1.7. *Siano $p_1, p_2, \dots, p_k$ polinomi non nulli tali che $(p_i, p_j) = 1$ per ogni i, j. Allora*

$$\mathrm{Ann}_V(\prod_{i=1}^{k} p_i) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ann}_V(p_i).$$

In particolare, l'applicazione canonica

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ann}_V(p_i) \to V$$

è iniettiva.

Dimostrazione. Poniamo, $m = p_1 p_2 \cdots p_k$ e, per ogni i tra 1 e k, $q_i = m/p_i$, ovvero

$$q_i = \prod_{j \neq i} p_j.$$

Si ha, chiaramente

(1) $(q_1, q_2, \dots, q_k) = 1$;
(2) per ogni i tra 1 e k, $p_i q_i = m$;
(3) per ogni $i \neq j$ tra 1 e k si ha $p_i | q_j$.

Poiché $(p_i) \subseteq (m)$, tutti i sottospazi $\mathrm{Ann}_V(p_i)$ di V sono sottospazi di $\mathrm{Ann}_V(m)$. Dalla (1) segue che esistono polinomi $a_1, \dots a_k$ tali che

$$a_1 q_1 + a_2 q_2 + \cdots a_k q_k = 1$$

Dunque, per ogni v in $\mathrm{Ann}_V(m)$ si ha

$$\begin{aligned} v &= 1 \cdot v \\ &= (a_1 q_1 + a_2 q_2 + \cdots a_k q_k) \cdot v \\ &= a_1 q_1 \cdot v + a_2 q_2 \cdot v + \cdots a_k q_k \cdot v. \end{aligned}$$

Dalla (2) si ha $p_i \cdot (a_i q_i \cdot v) = a_i \cdot (m \cdot v) = 0$, dunque $a_i q_i \cdot v$ è un elemento di $\mathrm{Ann}_V(p_i)$ e abbiamo ottenuto

$$\mathrm{Ann}_V(m) = \mathrm{Ann}_V(p_1) + \mathrm{Ann}_V(p_2) + \cdots + \mathrm{Ann}_V(p_k).$$

Resta da dimostrare che la somma è diretta. Supponiamo di avere vettori $v_i \in \mathrm{Ann}_V(p_i)$ con $v_1 + v_2 + \cdots v_k = 0$. Dalla (3) segue che $q_i \cdot v_j = 0$ per ogni $i \neq j$. Dunque moltiplicando per

a_iq_i ambo i membri dell'uguaglianza $v_1 + v_2 + \cdots v_k = 0$, troviamo $a_iq_i \cdot v_i = 0$. D'altronde $a_jq_j \cdot v_i = 0$, per ogni $j \neq i$, dunque

$$v_i = 1 \cdot v_i = (a_1q_1 + \cdots a_kq_k) \cdot v_i = a_iq_i \cdot v_i = 0.$$

□

Definizione 1.8. Nelle notazioni precedenti, se λ è un elemento di $\mathbb{K}$, poniamo

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \mathrm{Ann}_V(x-\lambda) = \ker(\varphi - \lambda\mathrm{Id}), \\ V_\lambda^{(n)} &= \mathrm{Ann}_V((x-\lambda)^n) = \ker\left((\varphi-\lambda\mathrm{Id})^n\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\ V_\lambda^{(\infty)} &= \mathrm{Ann}_V((x-\lambda)^\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker\left((\varphi-\lambda\mathrm{Id})^n\right). \end{aligned}$$

Il sottospazio V_λ di V viene detto λ-*autospazio* dell'endomorfismo φ ed il sottospazio $V_\lambda^{(\infty)}$ viene detto λ-*autospazio generalizzato* dell'endomorfismo φ. Se $V_\lambda \neq \{0\}$, lo scalare λ si dice *autovalore* di φ e V_λ prende il nome di autospazio relativo all'autovalore λ. Si ha, ovviamente, $V_\lambda^{(1)} = V_\lambda$ e $V_\lambda^{(0)} = \{0\}$.

Osservazione 1.9. Dalla definizione segue subito che V_λ è il sottospazio di V su cui l'endomorfismo φ agisce come la moltiplicazione per λ. In altre parole, $v \in V_\lambda$ se e solo se $\varphi(v) = \lambda v$.

Osservazione 1.10. Per definizione di V_λ, si ha $V_\lambda \neq \{0\}$ se e solo se $\varphi - \lambda\mathrm{Id}$ non è iniettiva. Se V ha dimensione finita questo è equivalente a chiedere che $\varphi - \lambda\mathrm{Id}$ non sia invertibile, ovvero a chiedere che λ sia un elemento dello spettro di φ.

Lemma 1.11. *Presi comunque $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ elementi distinti di $\mathbb{K}$ e presi comunque interi positivi $n_1, n_2, \ldots, n_k$, l'applicazione canonica*

$$\bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}^{(n_i)} \to V$$

è iniettiva.

Dimostrazione. Basta usare la Proposizione 1.7 con $p_i = (x-\lambda_i)^{n_i}$. □

Proposizione 1.12. *L'applicazione canonica*

$$\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}} V_\lambda^{(\infty)} \to V$$

è iniettiva, ovvero la somma degli autospazi generalizzati è diretta.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che se una somma *finita* $v_{\lambda_1} + v_{\lambda_2} + \cdots + v_{\lambda_k}$, con $v_{\lambda_i} \in V_{\lambda_i}^{(\infty)}$ è uguale a 0, allora ogni addendo è uguale a zero. Per definizione di autospazi generalizzati, per ognuno degli addendi v_{λ_i} della somma in esame esiste un intero positivo n_i tale che $v_{\lambda_i} \in V_{\lambda_i}^{(n_i)}$. A questo punto basta utilizzare il Lemma 1.11. □

Corollario 1.13. *L'applicazione canonica*

$$\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}} V_\lambda \to V$$

è iniettiva, ovvero la somma degli autospazi è diretta.

Osservazione 1.14. Col solito abuso di notazione scriveremo $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}} V_\lambda^{(\infty)} \subseteq V$ per indicare che la somma degli autospazi generalizzati è diretta . Osserviamo che in generale l'applicazione canonica $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}} V_\lambda^{(\infty)} \to V$ non è suriettiva, ovvero l'inlusione $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}} V_\lambda^{(\infty)} \subseteq V$ è propria. A maggior ragione, in generale l'inclusione $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}} V_\lambda \subseteq V$ è propria. Vedremo nel seguito di questa nota che se V ha dimensione finita allora vale sempre $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}} V_\lambda^{(\infty)} = V$, mentre anche in dimensione finita l'inclusione $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}} V_\lambda \subseteq V$ può essere propria.

Osservazione 1.15. Se λ non appartiene allo spettro di φ si ha $V_\lambda^{(\infty)} = \{0\}$. Infatti, se $\lambda \notin \sigma_\varphi$, allora $\varphi - \lambda\mathrm{Id}$ è invertibile e di conseguenza $(\varphi - \lambda\mathrm{Id})^n$ è invertibile, e dunque iniettivo, per ogni intero positivo n; ne segue $V_\lambda^{(\infty)} = \{0\}$. Abbiamo dunque

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V_\lambda^{(\infty)} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_\varphi} V_\lambda^{(\infty)}$$

e, analogamente,

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_\varphi} V_\lambda.$$

Definizione 1.16. Un endomorfismo φ di uno spazio vettoriale V si dice *diagonalizzabile* se l'applicazione canonica $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}} V_\lambda \to V$ è un isomorfimo. Col solito abuso di notazione diremo che φ è diagonalizzabile se

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V_\lambda.$$

Osservazione 1.17. E' immediato osservare che un endomorfismo φ è diagonalizzabile se e solo se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:

(1) $V = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{K}} V_\lambda^{(\infty)}$;
(2) $V_\lambda^{(\infty)} = V_\lambda$, per ogni λ in $\mathbb{K}$.

Sappiamo che $\mathbb{K}[x]$ è un anello a ideali principali, ovvero che ogni ideale $I \subseteq \mathbb{K}[x]$ è l'insieme dei polinomi che dividono un qualche polinomio m. Inoltre, se $I \neq \{0\}$, questo polinomio è un polinomio di grado minimo tra i polinomi di I; da questo segue tra l'altro che m unico a meno di multipli scalari. Un tale polinomio prende il nome di polinomio minimo dell'ideale I.

Definizione 1.18. Sia $\varphi\colon V \to V$ un endomorfismo, e consideriamo la struttura di $\mathbb{K}[x]$-modulo indotta su V dalla scelta di φ. Se $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(V) \neq \{0\}$, un *polinomio minimo* di φ è un polinomio m_φ tale che $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(V) = (m_\varphi)$.

Osservazione 1.19. Abbiamo già osservato che se V ha dimensione finita allora $\mathrm{Ann}_{\mathbb{K}[x]}(V) \neq \{0\}$. Dunque ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita ha polinomio minimo.

Osservazione 1.20. Poiché m_φ, se esiste, è unico a meno di multipli scalari, diremo che m_φ è *il* polinomio minimo di φ.

Proposizione 1.21. *Se l'endomorfismo φ ha polinomio minimo, allora le seguenti sono equivalenti:*

(1) *λ è una radice di $m_\varphi(\lambda)$;*
(2) *λ è un autovalore di φ;*
(3) *$V_\lambda^{(\infty)} \neq \{0\}$;*
(4) *λ è un elemento dello spettro di φ.*

Dimostrazione. Se λ è radice di m_φ, allora $m_\varphi(x) = (x-\lambda)q(x)$. Se $q \cdot V = \{0\}$ allora, per definizione di polinomio minimo, $m_\varphi | q$, il che è impossibile perché il grado di q è strettamente minore del grado di m_φ. Dunque esiste un vettore v di V tale che $q \cdot v \neq 0$. Si ha, chiaramente, $(x-\lambda)\cdot(q\cdot v) = 0$ e dunque $q \cdot v \in V_\lambda$, che di conseguenza è diverso da $\{0\}$. Dunque (1) implica (2). L'implicazione "(2) implica (3)" è ovvia in quanto $V_\lambda \subseteq V_\lambda^{(\infty)}$. L'Osservazione 1.15 ci dice che "(3) implica (4)". Infine, sia λ un elemento dello spettro di φ e supponiamo per assurdo che λ non sia radice di m_φ. In questo caso si ha $(x-\lambda, m_\varphi) = 1$, dunque esistono due polinomi a e b tali che $a(x-\lambda) + bm_\varphi = 1$. Per ogni vettore v di V si ha allora

$$v = 1 \cdot v = a(x-\lambda)\cdot v + bm_\varphi \cdot v = a(x-\lambda)\cdot v = (x-\lambda)a \cdot v.$$

Dunque l'endomorfismo $\varphi - \lambda\mathrm{Id}$ è invertibile con inverso dato da $a(\varphi)$, il che contraddice l'ipotesi che φ fosse nello spettro di φ. Questo dimostra che da (4) segue (1). □

Osservazione 1.22. Dalla proposizione precedente segue in particolare che se φ ha polinomio minimo, allora lo spettro di φ è un insieme finito (non è vero il viceversa). In particolare, se V è uno spazio di dimensione finita, lo spettro di un qualsiasi endomorfismo di V è finito.

Proposizione 1.23. *Se l'endomorfismo φ ha polinomio minimo, allora per ogni scalare λ si ha:*

(1) *la successione crescente di sottospazi $V_\lambda^{(n)}$ si stabilizza.*
(2) *il punto n_λ in cui la successione $V_\lambda^{(n)}$ si stabilizza coincide con la molteplicità algebrica di λ come radice del polinomio minimo m_φ.*

Dimostrazione. Sia e_λ la molteplicità algebrica di λ come radice del polinomio minimo m_φ. Se $e_\lambda = 0$ non c'è nulla da dimostrare: λ non è un elemento dello spettro di φ, quindi $V_\lambda^{(\infty)} = V_\lambda^{(0)} = \{0\}$. Se $e_\lambda \geq 1$, scriviamo $m_\varphi = (x-\lambda)^{e_\lambda} q$, con $((x-\lambda), q) = 1$. Dalla Proposizione 1.7 con $p_1 = (x-\lambda)^{e_\lambda}$ e $p_2 = q$, e osservando che $\mathrm{Ann}_V(m_\varphi) = V$, si ricava $V = V_\lambda^{(e_\lambda)} \oplus \mathrm{Ann}_V(q)$. Allo stesso modo, con $p_1 = (x-\lambda)^{e_\lambda+1}$ e $p_2 = q$, e osservando che $m_\varphi | (x-\lambda)^{e_\lambda+1} q$, si ricava $V = V_\lambda^{(e_\lambda+1)} \oplus \mathrm{Ann}_V(q)$. Abbiamo così la catena di inclusioni

$$V = V_\lambda^{(e_\lambda)} \oplus \mathrm{Ann}_V(q) \subseteq V_\lambda^{(e_\lambda+1)} \oplus \mathrm{Ann}_V(q) = V$$

con $V_\lambda^{(e_\lambda)} \subseteq V_\lambda^{(e_\lambda+1)}$. Ne segue immediatamente $V_\lambda^{(e_\lambda+1)} = V_\lambda^{(e_\lambda)}$ e dunque, per la Proposizione 1.2, la successione $V_\lambda^{(n)}$ si stabilizza e si ha $V_\lambda^{(\infty)} = V_\lambda^{(e_\lambda)}$. Per concludere la dimostrazione ci basta allora dimostrare che $V_\lambda^{(e_\lambda-1)} \subsetneq V_\lambda^{(e_\lambda)}$. Se fosse $V_\lambda^{(e_\lambda-1)} = V_\lambda^{(e_\lambda)}$, allora da $V = V_\lambda^{(e_\lambda)} \oplus \mathrm{Ann}_V(q)$ segue immediatamente $V = V_\lambda^{(e_\lambda-1)} \oplus \mathrm{Ann}_V(q)$ e dunque il polinomio $(x-\lambda)^{e_\lambda-1} q$ annulla tutto lo spazio V, annullando i due addendi $V_\lambda^{(e_\lambda-1)}$ e $\mathrm{Ann}_V(q)$. Ma questo è impossibile perché $(x-\lambda)^{e_\lambda-1} q$ ha grado strettamente minore di $m_\varphi = (x-\lambda)^{e_\lambda} q$. □

Proposizione 1.24. *Se l'endomorfismo φ ha polinomio minimo, e m_φ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$, allora*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V_\lambda^{(\infty)}.$$

Più precisamente, si ha

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{K}} V_\lambda^{(e_\lambda)}, \qquad e \qquad V_\lambda^{(e_\lambda)} = V_\lambda^{(\infty)}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

dove e_λ è la molteplicità della radice λ nel polinomio minimo di φ.

Dimostrazione. Indichiamo con $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\} \subseteq \mathbb{K}$ l'insieme delle radici di m_φ nel campo $\mathbb{K}$. dalla proposizione precedente sappiamo che questo insieme coincide con lo spettro di φ. Per ipotesi, m_φ si fattorizza in fattori lineari su $\mathbb{K}$ e abbiamo

$$m_\varphi(x) = \prod_{\lambda \in \sigma_\varphi}^{k} (x-\lambda)^{e_\lambda},$$

dove $e_\lambda \geq 1$ è la molteplicità di λ come radice di m_φ. Applicando la Proposizione 1.7 con $p_i = (x-\lambda_i)^{e_{\lambda_i}}$ e ricordando che m_φ annulla tutto V, troviamo

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_\varphi} V_\lambda^{(e_\lambda)}.$$

A questo punto basta usare la Proposizione 1.23 e ricordare l'Osservazione 1.15. □

Corollario 1.25. *Supponiamo l'endomorfismo φ abbia polinomio minimo. Allora φ è diagonalizzabile se e solo se m_φ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ e ognuna di esse ha molteplicità 1.*

Dimostrazione. Se φ è diagonalizzabile, $V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_\varphi} V_\lambda$, e lo spettro è finito in quanto φ ha polinomio minimo (Osservazioni 1.15 e 1.22). Il polinomio $p = \prod_{\lambda \in \sigma\varphi} (x-\lambda)$ annulla ogni vettore di V in quanto annulla ognuno degli addendi V_λ; quest'ultima affermazione segue immediatamente da $(p) \subseteq (x - \lambda)$. Dunque $m_\varphi | p$. D'altra parte, ogni elemento dello spettro di φ è una radice di m_φ (Proposizione 1.21), e dunque $p | m_\varphi$. Ne segue che, a meno di un fattore scalare non nullo,

$$m_\varphi = \prod_{\lambda \in \sigma\varphi} (x - \lambda).$$

Il viceversa è un caso particolare della Proposizione 1.24. $\square$