

Seminario Matematico

In occasione della presentazione dei nuovi Ricercatori del Dipartimento

Strutture algebriche con origine in fisica e loro applicazioni

Alberto De Sole



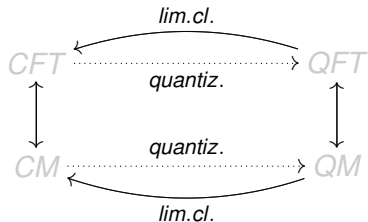
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Presentazione disponibile nel sito:

www.mat.uniroma1.it/~desole

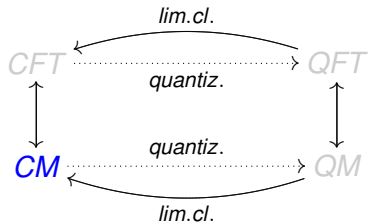
- 1 Algebre di vertice e Algebre di vertice di Poisson
- 2 Esempi di PVA
- 3 PVA e equazioni Hamiltoniane

Introduzione: "Le 4 teorie fisiche fondamentali"



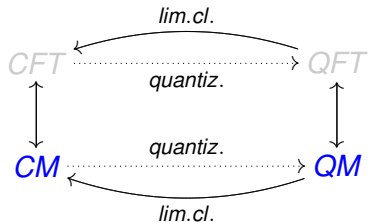
- Meccanica Classica: particelle puntiformi (numero finito di gradi di libertà); osservabili sono funzioni (commutano) nello spazio delle fasi; l'evoluzione dinamica è: $\dot{f}(x, p) = \{H, f\}$.
- Meccanica Quantistica: particelle puntiformi; osservabili sono operatori nello spazio delle fasi; la dinamica è: $\dot{O} = \frac{i}{\hbar}[H, O]$.
- Teoria di campo classica: particelle ondulatorie (numero infinito di gradi di libertà); osservabili sono funzionali, o *campi classici*.
- Teoria dei campi quant.: particelle ondulatorie; osservabili distrib. a valori operatori nello spazio degli stati, o *campi quantistici*.

Introduzione: "Le 4 teorie fisiche fondamentali"



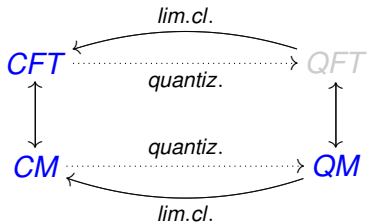
- **Meccanica Classica**: particelle puntiformi (numero finito di gradi di libertà); osservabili sono funzioni (commutano) nello spazio delle fasi; l'evoluzione dinamica è: $\dot{f}(x, p) = \{H, f\}$.
- Meccanica Quantistica: particelle puntiformi; osservabili sono operatori nello spazio delle fasi; la dinamica è: $\dot{O} = \frac{i}{\hbar}[H, O]$.
- Teoria di campo classica: particelle ondulatorie (numero infinito di gradi di libertà); osservabili sono funzionali, o *campi classici*.
- Teoria dei campi quant.: particelle ondulatorie; osservabili distrib. a valori operatori nello spazio degli stati, o *campi quantistici*.

Introduzione: "Le 4 teorie fisiche fondamentali"



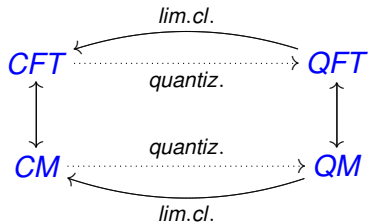
- **Meccanica Classica**: particelle puntiformi (numero finito di gradi di libert ); osservabili sono funzioni (commutano) nello spazio delle fasi; l'evoluzione dinamica  : $\dot{f}(x, p) = \{H, f\}$.
- **Meccanica Quantistica**: particelle puntiformi; osservabili sono operatori nello spazio delle fasi; la dinamica  : $\dot{O} = \frac{i}{\hbar}[H, O]$.
- Teoria di campo classica: particelle ondulatorie (numero infinito di gradi di libert ); osservabili sono funzionali, o *campi classici*.
- Teoria dei campi quant.: particelle ondulatorie; osservabili distrib. a valori operatori nello spazio degli stati, o *campi quantistici*.

Introduzione: "Le 4 teorie fisiche fondamentali"



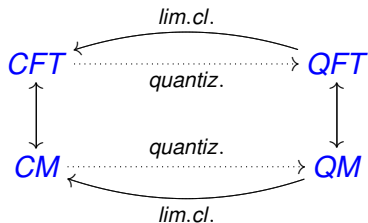
- **Meccanica Classica**: particelle puntiformi (numero finito di gradi di libertà); osservabili sono funzioni (commutano) nello spazio delle fasi; l'evoluzione dinamica è: $\dot{f}(x, p) = \{H, f\}$.
- **Meccanica Quantistica**: particelle puntiformi; osservabili sono operatori nello spazio delle fasi; la dinamica è: $\dot{O} = \frac{i}{\hbar}[H, O]$.
- **Teoria di campo classica**: particelle ondulatorie (numero infinito di gradi di libertà); osservabili sono funzionali, o *campi classici*.
- **Teoria dei campi quant.**: particelle ondulatorie; osservabili distrib. a valori operatori nello spazio degli stati, o *campi quantistici*.

Introduzione: "Le 4 teorie fisiche fondamentali"

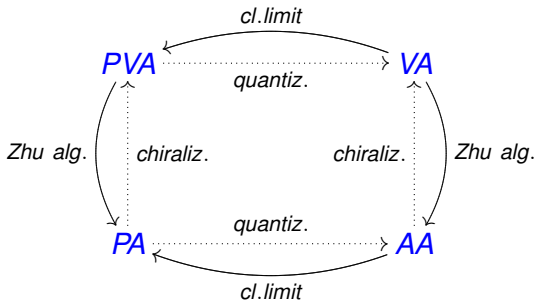


- **Meccanica Classica:** particelle puntiformi (numero finito di gradi di libertà); osservabili sono funzioni (commutano) nello spazio delle fasi; l'evoluzione dinamica è: $\dot{f}(x, p) = \{H, f\}$.
- **Meccanica Quantistica:** particelle puntiformi; osservabili sono operatori nello spazio delle fasi; la dinamica è: $\dot{O} = \frac{i}{\hbar}[H, O]$.
- **Teoria di campo classica:** particelle ondulatorie (numero infinito di gradi di libertà); osservabili sono funzionali, o *campi classici*.
- **Teoria dei campi quant.:** particelle ondulatorie; osservabili distrib. a valori operatori nello spazio degli stati, o *campi quantistici*.

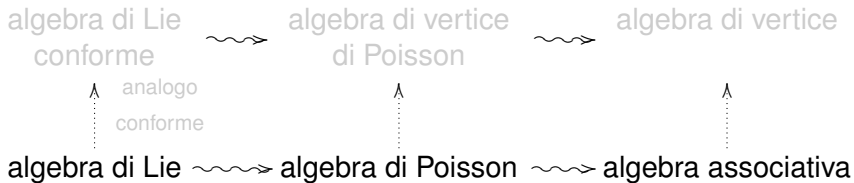
Introduzione: "Le 4 teorie fisiche fondamentali"



Strutture algebriche corrispondenti:



Algebre di Poisson & algebre associative



Definizione

Un' **algebra di Lie** (unitaria) è i seguenti **dati**:

- uno spazio vettoriale \mathcal{A} ,
- un elemento $1 \in \mathcal{A}$,
- un prodotto $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$,
- un bracket $\{ , \} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

Assiomi:

- i) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (unità)
- ii) $(ab)c - a(bc) = 0$ (associatività)
 $ab - ba = 0$ (commut.)
- iii) $\{a, b\} = -\{b, a\}$ (anti simm.)
 $\{a, \{b, c\}\} - \{b, \{a, c\}\} = \{\{a, b\}, c\}$ (id. Jacobi)
- iv) $\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}$ (regola di Leibniz)

Definizione

Un' **algebra di Poisson** (unitaria) è i seguenti **dati**:

- uno spazio vettoriale \mathcal{A} ,
- un elemento $1 \in \mathcal{A}$,
- un prodotto $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$,
- un bracket $\{ , \} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

Assiomi:

- i) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (unità)
- ii) $(ab)c - a(bc) = 0$ (associatività)
 $ab - ba = 0$ (commut.)
- iii) $\{a, b\} = -\{b, a\}$ (anti simm.)
 $\{a, \{b, c\}\} - \{b, \{a, c\}\} = \{\{a, b\}, c\}$ (id. Jacobi)
- iv) $\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}$ (regola di Leibniz)

Definizione

Un' **algebra di Poisson** (unitaria) è i seguenti **dati**:

- uno spazio vettoriale \mathcal{A} ,
- un elemento $1 \in \mathcal{A}$,
- un prodotto $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$,
- un bracket $\{ , \} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

Assiomi:

- i) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (unità)
- ii) $(ab)c - a(bc) = 0$ (associatività)
 $ab - ba = 0$ (commut.)
- iii) $\{a, b\} = -\{b, a\}$ (anti simm.)
 $\{a, \{b, c\}\} - \{b, \{a, c\}\} = \{\{a, b\}, c\}$ (id. Jacobi)
- iv) $\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}$ (regola di Leibniz)

Definizione

Un' **algebra di Poisson** (unitaria) è i seguenti **dati**:

- uno spazio vettoriale \mathcal{A} ,
- un elemento $1 \in \mathcal{A}$,
- un prodotto $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$,
- un bracket $\{ , \} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

Assiomi:

- i) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (unità)
- ii) $(ab)c - a(bc) = 0$ (associatività)
 $ab - ba = 0$ (commut.)
- iii) $\{a, b\} = -\{b, a\}$ (anti simm.)
 $\{a, \{b, c\}\} - \{b, \{a, c\}\} = \{\{a, b\}, c\}$ (id. Jacobi)
- iv) $\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}$ (regola di Leibniz)

Definizione

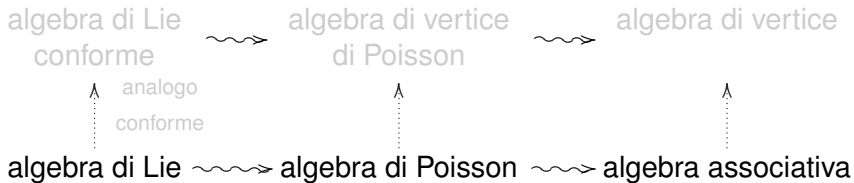
Un' **algebra di** **associativa** (unitaria) è i seguenti **dati**:

- uno spazio vettoriale \mathcal{A} ,
- un elemento $1 \in \mathcal{A}$,
- un prodotto $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$,
- un bracket $\{ , \} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

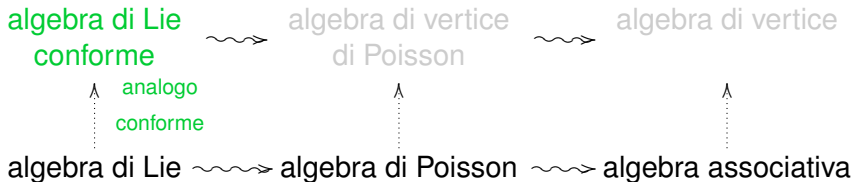
Assiomi:

- i) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (unità)
- ii) $(ab)c - a(bc) = 0$ (associatività)
 $ab - ba = \{a, b\}$ (q-commut.)
- iii) $\{a, b\} = -\{b, a\}$ (anti simm.)
 $\{a, \{b, c\}\} - \{b, \{a, c\}\} = \{\{a, b\}, c\}$ (id. Jacobi)
- iv) $\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}$ (regola di Leibniz)

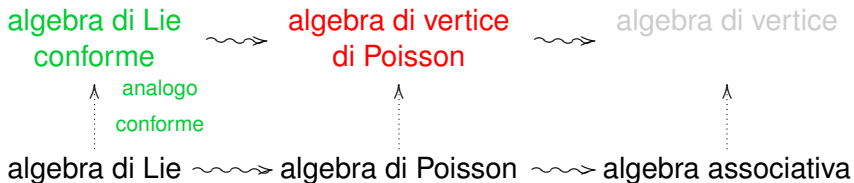
Algebre di vertice di Poisson & algebre di vertice



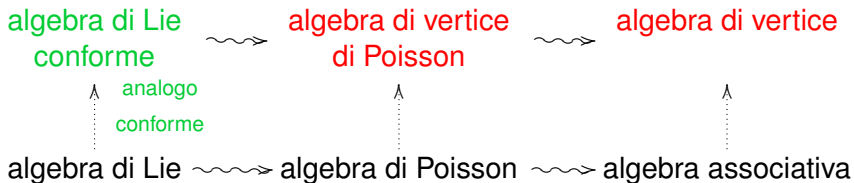
Algebre di vertice di Poisson & algebre di vertice



Algebre di vertice di Poisson & algebre di vertice



Algebre di vertice di Poisson & algebre di vertice



Definizione Un'algebra di Lie conforme R è uno spazio vettoriale con un endomorfismo $\partial \in \text{End } R$ e un bracket di Lie

$$a \otimes b \mapsto \{a_\lambda b\} \in R[\lambda]$$

soddisfacente i seguenti assiomi:

- sesquilinearità

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- anti-simmetria

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- identità di Jacobi

$$\{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}$$

Definizione Un'algebra di Lie differenziale R è uno spazio vettoriale con un endomorfismo $\partial \in \text{End } R$ e un bracket di Lie

$$a \otimes b \mapsto \{a_\lambda b\} \in R[\lambda]$$

soddisfacente i seguenti assiomi:

- regola di Leibniz

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- anti-simmetria

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- identità di Jacobi

$$\{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}$$

Definizione Un'algebra di Lie differenziale R è uno spazio vettoriale con un endomorfismo $\partial \in \text{End } R$ e un bracket di Lie

$$a \otimes b \mapsto \{a_\lambda b\} \in R[\lambda]$$

soddisfacente i seguenti assiomi:

- regola di Leibniz

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- anti-simmetria

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- identità di Jacobi

$$\{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}$$

Definizione Un'algebra di Lie conforme R è uno spazio vettoriale con un endomorfismo $\partial \in \text{End } R$ e un λ -bracket

$$a \otimes b \mapsto \{a_\lambda b\} \in R[\lambda]$$

soddisfacente i seguenti assiomi:

- sesquilinearità

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- anti-simmetria

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- identità di Jacobi

$$\{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}$$

Definizione Un'algebra di Lie conforme R è uno spazio vettoriale con un endomorfismo $\partial \in \text{End } R$ e un λ -bracket

$$a \otimes b \mapsto \{a_\lambda b\} \in R[\lambda]$$

soddisfacente i seguenti assiomi:

- sesquilinearità

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- anti-simmetria

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- identità di Jacobi

$$\{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}$$

Definizione Un'algebra di Lie conforme

R è uno spazio vettoriale con un endomorfismo $\partial \in \text{End } R$ e un λ -bracket

$$a \otimes b \mapsto \{a_\lambda b\} \in R[\lambda]$$

soddisfacente i seguenti assiomi:

- sesquilinearità

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- anti-simmetria

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- identità di Jacobi

$$\{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} = \{\{a_\lambda b\}_\lambda c\}$$

$$\{a_\lambda b\} = \sum_{n=0}^N \frac{\lambda^n}{n!} a_{(n)} b$$

$$\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

$$= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} (\lambda + \partial)^n (a_{(n)} b)$$

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- **identità di Jacobi**

$$\begin{aligned}\{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}\end{aligned}$$

Definizione Un'algebra di vertice di **Poisson** \mathcal{V} è uno spazio vettoriale con due strutture algebriche:

- un prodotto **commutativo associativo differenziale**, $f, g \mapsto f \cdot g \in \mathcal{V}$,
- un bracket di **algebra di Lie conforme** $f, g \mapsto \{f_\lambda g\} \in \mathcal{V}[\lambda]$;
- soddisfano la **regola di Leibniz** (da sinistra):

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- **identità di Jacobi**

$$\begin{aligned}\{a_\lambda\{b_\mu c\}\} - \{b_\mu\{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}\end{aligned}$$

Definizione Un'algebra di vertice di Poisson \mathcal{V} è uno spazio vettoriale con due strutture algebriche:

- un prodotto **commutativo associativo differenziale**, $f, g \mapsto f \cdot g \in \mathcal{V}$,
- un bracket di **algebra di Lie conforme** $f, g \mapsto \{f_\lambda g\} \in \mathcal{V}[\lambda]$;
- soddisfano la **regola di Leibniz** (da sinistra):

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- **identità di Jacobi**

$$\begin{aligned}\{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}\end{aligned}$$

Definizione Un'algebra di vertice di **Poisson** \mathcal{V} è uno spazio vettoriale con due strutture algebriche:

- un prodotto **commutativo associativo differenziale**, $f, g \mapsto f \cdot g \in \mathcal{V}$,
- un bracket di **algebra di Lie conforme** $f, g \mapsto \{f_\lambda g\} \in \mathcal{V}[\lambda]$;
- soddisfano la **regola di Leibniz** (da sinistra):

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- **identità di Jacobi**

$$\begin{aligned}\{a_\lambda\{b_\mu c\}\} - \{b_\mu\{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}\end{aligned}$$

Definizione Un'algebra di vertice di **Poisson** \mathcal{V} è uno spazio vettoriale con due strutture algebriche:

- un prodotto **commutativo associativo differenziale**, $f, g \mapsto f \cdot g \in \mathcal{V}$,
- un bracket di **algebra di Lie conforme** $f, g \mapsto \{f_\lambda g\} \in \mathcal{V}[\lambda]$;
- soddisfano la **regola di Leibniz** (da sinistra):

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

Nota: Segue la **regola di Leibniz da destra**:

$$\{fg_\lambda h\} = \{f_{\lambda+\partial} g\}h + \{h_{\lambda+\partial} g\}f.$$

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- **identità di Jacobi**

$$\begin{aligned}\{a_\lambda\{b_\mu c\}\} - \{b_\mu\{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}\end{aligned}$$

Definizione Un'algebra di vertice di **Poisson** \mathcal{V} è uno spazio vettoriale con due strutture algebriche:

- un prodotto **commutativo associativo differenziale**, $f, g \mapsto f \cdot g \in \mathcal{V}$,
- un bracket di **algebra di Lie conforme** $f, g \mapsto \{f_\lambda g\} \in \mathcal{V}[\lambda]$;
- soddisfano la **regola di Leibniz** (da sinistra):

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

Nota: Segue la **regola di Leibniz da destra**:

$$\{fg_\lambda h\} = \{f_{\lambda+\partial} g\} \rightarrow h + \{h_{\lambda+\partial} g\} \rightarrow f.$$

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- **identità di Jacobi**

$$\begin{aligned}\{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}\end{aligned}$$

$$\{f_{\lambda+\partial} g\} \rightarrow h$$

$$= \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (f_{(n)} g) (\lambda + \partial)^n h$$

Definizione Un'algebra di vertice di **Poisson** \mathcal{V} è uno spazio vettoriale con due strutture algebriche:

- un prodotto **commutativo associativo differenziale**, $f, g \mapsto f \cdot g \in \mathcal{V}$,
- un bracket di **algebra di Lie conforme** $f, g \mapsto \{f_\lambda g\} \in \mathcal{V}[\lambda]$;
- soddisfano la **regola di Leibniz** (da sinistra):

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

Nota: Segue la **regola di Leibniz da destra**:

$$\{fg_\lambda h\} = \{f_{\lambda+\partial} g\} \rightarrow h + \{h_{\lambda+\partial} g\} \rightarrow f.$$

Def. Un'algebra di vertice di Poisson è i seguenti dati:

V : spazio degli stati; $|0\rangle \in V$: vuoto; $\partial \in \text{End}(V)$: trasl.infinit.;
 $a \cdot b \in V$, prod. ; $[a_\lambda b] \in V[\lambda]$, λ -bracket.

Assiomi:

$$a|0\rangle = |0\rangle a = a \quad (\text{vuoto})$$

$$\partial(ab) = (\partial a)b + a(\partial b) \quad (\text{Leibniz})$$

$$(ab)c - a(bc) = 0 \quad (\text{assoc.})$$

$$ab - ba = 0 \quad (\text{commut.})$$

$$\partial[a_\lambda b] = [\partial a_\lambda b] + [a_\lambda \partial b] \quad (\text{sesquilin.})$$

$$[\partial a_\lambda b] = -\lambda[a_\lambda b]$$

$$[a_\lambda b] = -[b_{-\lambda-\partial} a] \quad (\text{anti-sim.})$$

$$[a_\lambda [b_\mu c]] - [b_\mu [a_\lambda c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] \quad (\text{id. Jacobi})$$

$$[a_\lambda b]c = [a_\lambda b]c + b[a_\lambda c] \quad (\text{form. Wick})$$

Def. Un'algebra di vertice è i seguenti dati:

V : spazio degli stati; $|0\rangle \in V$: vuoto; $\partial \in \text{End}(V)$: trasl.infinit.;
 $:ab:$ $\in V$, prod. norm. ordinato ; $[a_\lambda b] \in V[\lambda]$, λ -bracket.

Assiomi:

$$:a|0\rangle := :|0\rangle a := a \quad (\text{vuoto})$$

$$\partial(:ab:) = :(\partial a)b: + :a(\partial b): \quad (\text{Leibniz})$$

$$:(:ab:)c: - :a(:bc:): \quad (\text{q-assoc.})$$

$$=: \left(\int_0^\partial d\lambda a \right) [b_\lambda c]: + (a \leftrightarrow b)$$

$$:ab: - :ba: = \int_{-\partial}^0 d\lambda [a_\lambda b] \quad (\text{q-commut.})$$

$$\partial[a_\lambda b] = [\partial a_\lambda b] + [a_\lambda \partial b] \quad (\text{sesquilin.})$$

$$[\partial a_\lambda b] = -\lambda[a_\lambda b]$$

$$[a_\lambda b] = -[b_{-\lambda-\partial} a] \quad (\text{anti-sim.})$$

$$[a_\lambda [b_\mu c]] - [b_\mu [a_\lambda c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] \quad (\text{id.Jacobi})$$

$$[a_\lambda :bc:] = :[a_\lambda b]c: + :b[a_\lambda c]: \quad (\text{form.Wick})$$

$$+ \int_0^\lambda d\mu [[a_\lambda b]_\mu c]$$

Def. Un'algebra di vertice è i seguenti dati:

V : spazio degli stati; $|0\rangle \in V$: vuoto; $\partial \in \text{End}(V)$: trasl.infinit.;
 $:ab:$ $\in V$, prod. norm. ordinato ; $[a_\lambda b] \in V[\lambda]$, λ -bracket.

Assiomi:

$$:a|0\rangle := :|0\rangle a := a \quad (\text{vuoto})$$

$$\partial(:ab:) = :(\partial a)b: + :a(\partial b): \quad (\text{Leibniz})$$

$$:(:ab:)c: - :a(:bc:): \quad (\text{q-assoc.})$$

$$=: \left(\int_0^\partial d\lambda a \right) [b_\lambda c]: + (a \leftrightarrow b)$$

$$:ab: - :ba: = \int_{-\partial}^0 d\lambda [a_\lambda b] \quad (\text{q-commut.})$$

$$\partial[a_\lambda b] = [\partial a_\lambda b] + [a_\lambda \partial b] \quad (\text{sesquilin.})$$

$$[\partial a_\lambda b] = -\lambda [a_\lambda b]$$

$$[a_\lambda b] = -[b_{-\lambda-\partial} a] \quad (\text{anti-sim.})$$

$$[a_\lambda [b_\mu c]] - [b_\mu [a_\lambda c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] \quad (\text{id.Jacobi})$$

$$[a_\lambda :bc:] = :[a_\lambda b]c: + :b[a_\lambda c]: \quad (\text{form.Wick})$$

$$+ \int_0^\lambda d\mu [[a_\lambda b]_\mu c]$$

Def. Un'algebra di vertice è i seguenti dati:

V : spazio degli stati; $|0\rangle \in V$: vuoto; $\partial \in \text{End}(V)$: trasl.infinit.;

$:ab:$ $\in V$, prod. norm. ordinato ; $[a_\lambda b] \in V[\lambda]$, λ -bracket.

Assiomi:

$$:a|0\rangle := :|0\rangle a := a \quad (\text{vuoto})$$

$$\partial(:ab:) = :(\partial a)b: + :a(\partial b): \quad (\text{Leibniz})$$

$$:(:ab:)c: - :a(:bc:): \quad (\text{q-assoc.})$$

$$=: \left(\int_0^\partial d\lambda a \right) [b_\lambda c]: + (a \leftrightarrow b)$$

$$:ab: - :ba: = \int_{-\partial}^0 d\lambda [a_\lambda b] \quad (\text{q-commut.})$$

$$\partial[a_\lambda b] = [\partial a_\lambda b] + [a_\lambda \partial b] \quad (\text{sesquilin.})$$

$$[\partial a_\lambda b] = -\lambda[a_\lambda b]$$

$$[a_\lambda b] = -[b_{-\lambda-\partial} a] \quad (\text{anti-sim.})$$

$$[a_\lambda [b_\mu c]] - [b_\mu [a_\lambda c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] \quad (\text{id.Jacobi})$$

$$[a_\lambda :bc:] = :[a_\lambda b]c: + :b[a_\lambda c]: \quad (\text{form.Wick})$$

$$+ \int_0^\lambda d\mu [[a_\lambda b]_\mu c]$$

Def. Un'algebra di vertice è i seguenti dati:

V : spazio degli stati; $|0\rangle \in V$: vuoto; $\partial \in \text{End}(V)$: trasl.infinit.;
 $:ab:$ $\in V$, prod. norm. ordinato ; $[a_\lambda b] \in V[\lambda]$, λ -bracket.

Assiomi:

$$:a|0\rangle := :|0\rangle a := a \quad (\text{vuoto})$$

$$\partial(:ab:) = :(\partial a)b: + :a(\partial b): \quad (\text{Leibniz})$$

$$:(:ab:)c: - :a(:bc:): \quad (\text{q-assoc.})$$

$$= :(\int_0^\partial d\lambda a)[b_\lambda c]: + (a \leftrightarrow b)$$

$$:ab: - :ba: = \int_{-\partial}^0 d\lambda [a_\lambda b] \quad (\text{q-commut.})$$

$$\partial[a_\lambda b] = [\partial a_\lambda b] + [a_\lambda \partial b] \quad (\text{sesquilin.})$$

$$[\partial a_\lambda b] = -\lambda[a_\lambda b]$$

$$[a_\lambda b] = -[b_{-\lambda-\partial} a] \quad (\text{anti-sim.})$$

$$[a_\lambda [b_\mu c]] - [b_\mu [a_\lambda c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] \quad (\text{id.Jacobi})$$

$$[a_\lambda :bc:] = :[a_\lambda b]c: + :b[a_\lambda c]: \quad (\text{form.Wick})$$

$$+ \int_0^\lambda d\mu [[a_\lambda b]_\mu c]$$

$$\begin{aligned} & (\int_0^\partial d\lambda a)[b_\lambda c] \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{\partial^{n+1} a}{(n+1)!} b_{(n)} c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\partial}^0 d\lambda [a_\lambda b] \\ &= - \sum_{n=0}^N \frac{(-\partial)^{n+1} (a_{(n)} b)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [b_{-\lambda-\partial} a] \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (-\lambda - \partial)^n (b_{(n)} a) \end{aligned}$$

Outline

- 1 Algebre di vertice e Algebre di vertice di Poisson
- 2 Esempi di PVA**
- 3 PVA e equazioni Hamiltoniane

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\partial\{a_\lambda b\} = \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\}$$

$$\{\partial a_\lambda b\} = -\lambda\{a_\lambda b\}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda} \partial b\}$$

- **id. Jacobi**

$$\begin{aligned} \{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\} \end{aligned}$$

Algebra di vertice di Poisson

- un'algebra comm. assoc. differenziale, derivata ∂ e prodotto $f \cdot g$,

- un'algebra di Lie conforme, con deriv. ∂ e λ -bracket $\{f_\lambda g\}$;

- regola di Leibniz:

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

Def: Un'algebra di funzioni differenziabili è

$$\mathbb{C}[u_i^{(n)} \mid i = 1, \dots, \ell, n \in \mathbb{Z}_+] \subset \mathcal{V}$$

con le derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V},$$

e la derivata totale

$$\partial = \sum_{i,n} u_i^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}.$$

Chiediamo: $\frac{\partial f}{\partial u_i^{(n)}} = 0$ for $n \gg 0$, regole

di commutazione: $\left[\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}, \partial \right] = \frac{\partial}{\partial u_i^{(n-1)}}.$

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\partial\{a_\lambda b\} = \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\}$$

$$\{\partial a_\lambda b\} = -\lambda\{a_\lambda b\}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda} b\}$$

- **id. Jacobi**

$$\begin{aligned} \{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\} \end{aligned}$$

Algebra di vertice di Poisson

- un'algebra comm. assoc. differenziale, derivata ∂ e prodotto $f \cdot g$,

- un'algebra di Lie conforme, con deriv. ∂ e λ -bracket $\{f_\lambda g\}$;

- **regola di Leibniz:**

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

Def: Un'algebra di funzioni differenziabili è

$$\mathbb{C}[u_i^{(n)} \mid i = 1, \dots, \ell, n \in \mathbb{Z}_+] \subset \mathcal{V}$$

con le **derivate parziali**

$$\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V},$$

e la derivata totale

$$\partial = \sum_{i,n} u_i^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}.$$

Chiediamo: $\frac{\partial f}{\partial u_i^{(n)}} = 0$ for $n \gg 0$, regole di commutazione: $\left[\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}, \partial \right] = \frac{\partial}{\partial u_i^{(n-1)}}.$

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\partial\{a_\lambda b\} = \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\}$$

$$\{\partial a_\lambda b\} = -\lambda\{a_\lambda b\}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda} \partial b\}$$

- **id. Jacobi**

$$\begin{aligned} \{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\} \end{aligned}$$

Algebra di vertice di Poisson

- un'algebra comm. assoc. differenziale, derivata ∂ e prodotto $f \cdot g$,
- un'algebra di Lie conforme, con deriv. ∂ e λ -bracket $\{f_\lambda g\}$;
- regola di Leibniz:
$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

Def: Un'algebra di funzioni differenziabili è

$$\mathbb{C}[u_i^{(n)} \mid i = 1, \dots, \ell, n \in \mathbb{Z}_+] \subset \mathcal{V}$$

con le **derivate parziali**

$$\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V},$$

e la **derivata totale**

$$\partial = \sum_{i,n} u_i^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}.$$

Chiediamo: $\frac{\partial f}{\partial u_i^{(n)}} = 0$ for $n \gg 0$, regole di commutazione: $\left[\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}, \partial \right] = \frac{\partial}{\partial u_i^{(n-1)}}.$

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\partial\{a_\lambda b\} = \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\}$$

$$\{\partial a_\lambda b\} = -\lambda\{a_\lambda b\}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda} b\}$$

- **id. Jacobi**

$$\begin{aligned} \{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\} \end{aligned}$$

Algebra di vertice di Poisson

- un'algebra comm. assoc. differenziale, derivata ∂ e prodotto $f \cdot g$,

- un'algebra di Lie conforme, con deriv. ∂ e λ -bracket $\{f_\lambda g\}$;

- **regola di Leibniz:**

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

Def: Un'algebra di funzioni differenziabili è

$$\mathbb{C}[u_i^{(n)} \mid i = 1, \dots, \ell, n \in \mathbb{Z}_+] \subset \mathcal{V}$$

con le **derivate parziali**

$$\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V},$$

e la **derivata totale**

$$\partial = \sum_{i,n} u_i^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}.$$

Chiediamo: $\frac{\partial f}{\partial u_i^{(n)}} = 0$ for $n \gg 0$, regole

di commutazione: $\left[\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}, \partial \right] = \frac{\partial}{\partial u_i^{(n-1)}}.$

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- **id. Jacobi**

$$\begin{aligned}a_\lambda \{b_\mu c\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}\end{aligned}$$

Algebra di vertice di Poisson

- un'algebra comm. assoc. differenziale, derivata ∂ e prodotto $f \cdot g$,
- un'algebra di Lie conforme, con deriv. ∂ e λ -bracket $\{f_\lambda g\}$;
- regola di Leibniz:
 $\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}$.

Def: Un'algebra di funzioni differenziabili è

$$\mathbb{C}[u_i^{(n)} \mid i = 1, \dots, \ell, n \in \mathbb{Z}_+] \subset \mathcal{V}$$

con le **derivate parziali**

$$\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V},$$

e la **derivata totale**

$$\partial = \sum_{i,n} u_i^{(n+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}.$$

Formula Principale: $\{f_\lambda g\} =$

$$\sum_{i,j,m,n} \frac{\partial g}{\partial u_j^{(n)}} (\lambda + \partial)^n \{u_{i\lambda+\partial} u_j\} \rightarrow (-\lambda - \partial)^m \frac{\partial f}{\partial u_i^{(m)}}$$

Esempi

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda} \partial b\}$$

- **id. Jacobi**

$$\begin{aligned}\{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}\end{aligned}$$

Algebra di vertice di Poisson

- un'algebra comm. assoc. differenziale, con derivata ∂ e prodotto $f \cdot g$,
- un'algebra di Lie conforme, deriv. ∂ e λ -bracket $\{f_\lambda g\}$;
- **regola di Leibniz:**

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

- 1 **PVA GFZ:** $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}_+]$ con $\{u_\lambda u\} = \lambda$

- 2 PVA Virasoro-Magri: $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}_+]$ con

$$\{u_\lambda u\} = u' + 2u\lambda + c\lambda^3$$

c : carica centrale di Virasoro

Note: every linear combin. is a PVA!

- 3 PVA affini: **Dati:** algebra di Lie \mathfrak{g} , $\rho \in \mathfrak{g}$, forma bilin. simm. invariante (\mid) , $k \in \mathbb{C}$
 $V^{cl}(\mathfrak{g}, \rho, (\mid)) = \mathbb{C}[\mathbb{C}[\partial]\mathfrak{g}]$ con $(a, b \in \mathfrak{g})$
 $\{a_\lambda b\} = [a, b] + (\rho \mid [a, b]) + k(a \mid b)\lambda.$

Esempi

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- **id. Jacobi**

$$\begin{aligned} \{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\} \end{aligned}$$

Algebra di vertice di Poisson

- un'algebra comm. assoc. differenziale, con derivata ∂ e prodotto $f \cdot g$,
- un'algebra di Lie conforme, deriv. ∂ e λ -bracket $\{f_\lambda g\}$;
- **regola di Leibniz:**

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

- 1 **PVA GFZ:** $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}_+]$ con $\{u_\lambda u\} = \lambda$

- 2 **PVA Virasoro-Magri:** $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}_+]$ con

$$\{u_\lambda u\} = u' + 2u\lambda + c\lambda^3$$

c: carica centrale di Virasoro

Note: every linear combin. is a PVA!

- 3 **PVA affini:** **Dati:** algebra di Lie \mathfrak{g} , $\rho \in \mathfrak{g}$, forma bilin. simm. invariante (\mid) , $k \in \mathbb{C}$
 $V^{cl}(\mathfrak{g}, \rho, (\mid)) = \mathbb{C}[\mathbb{C}[\partial]\mathfrak{g}]$ con $(a, b \in \mathfrak{g})$
 $\{a_\lambda b\} = [a, b] + (\rho\mid[a, b]) + k(a\mid b)\lambda.$

Esempi

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- **id. Jacobi**

$$\begin{aligned}a_\lambda \{b_\mu c\} - \{b_\mu a_\lambda c\} \\ = \{ \{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c \}\end{aligned}$$

Algebra di vertice di Poisson

- un'algebra comm. assoc. differenziale, con derivata ∂ e prodotto $f \cdot g$,

- un'algebra di Lie conforme, deriv. ∂ e λ -bracket $\{f_\lambda g\}$;

- **regola di Leibniz:**

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

1 **PVA GFZ:** $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}_+]$ con $\{u_\lambda u\} = \lambda$

2 **PVA Virasoro-Magri:**
 $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}_+]$ con

$$\{u_\lambda u\} = u' + 2u\lambda + c\lambda^3$$

c: carica centrale di Virasoro

Note: every linear combin. is a PVA!

3 **PVA affini:** **Dati:** algebra di Lie \mathfrak{g} , $\rho \in \mathfrak{g}$, forma bilin. simm. invariante (\mid) , $k \in \mathbb{C}$
 $V^{cl}(\mathfrak{g}, \rho, (\mid)) = \mathbb{C}[\mathbb{C}[\partial]\mathfrak{g}]$ con $(a, b \in \mathfrak{g})$
 $\{a_\lambda b\} = [a, b] + (\rho \mid [a, b]) + k(a \mid b)\lambda.$

Esempi

Algebra di Lie conforme

Un $\mathbb{C}[\partial]$ -modulo R con un λ -bracket $R \otimes R \rightarrow R[\lambda]$ che soddisfa

- **sesquilinearità**

$$\begin{aligned}\partial\{a_\lambda b\} &= \{\partial a_\lambda b\} + \{a_\lambda \partial b\} \\ \{\partial a_\lambda b\} &= -\lambda\{a_\lambda b\}\end{aligned}$$

- **anti-simmetria**

$$\{b_\lambda a\} = -\{a_{-\lambda-\partial} b\}$$

- **id. Jacobi**

$$\begin{aligned}\{a_\lambda \{b_\mu c\}\} - \{b_\mu \{a_\lambda c\}\} \\ = \{\{a_\lambda b\}_{\lambda+\mu} c\}\end{aligned}$$

Algebra di vertice di Poisson

- un'algebra comm. assoc. differenziale, con derivata ∂ e prodotto $f \cdot g$,

- un'algebra di Lie conforme, deriv. ∂ e λ -bracket $\{f_\lambda g\}$;

- **regola di Leibniz:**

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + g\{f_\lambda h\}.$$

1 **PVA GFZ:** $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}_+]$ con $\{u_\lambda u\} = \lambda$

2 **PVA Virasoro-Magri:**
 $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u^{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}_+]$ con

$$\{u_\lambda u\} = u' + 2u\lambda + c\lambda^3$$

c: carica centrale di Virasoro

Note: every linear combin. is a PVA!

3 **PVA affini:** **Dati:** algebra di Lie \mathfrak{g} , $\rho \in \mathfrak{g}$, forma bilin. simm. invariante (\mid) , $k \in \mathbb{C}$
 $V^{cl}(\mathfrak{g}, \rho, (\mid)) = \mathbb{C}[\mathbb{C}[\partial]\mathfrak{g}]$ con $(a, b \in \mathfrak{g})$

$$\{a_\lambda b\} = [a, b] + (\rho[a, b]) + k(a\mid b)\lambda.$$

Outline

- 1 Algebre di vertice e Algebre di vertice di Poisson
- 2 Esempi di PVA
- 3 PVA e equazioni Hamiltoniane**

Che legame c'è tra le P.V.A. e le equazioni Hamiltoniane?

Che legame c'è tra le P.V.A. e le equazioni Hamiltoniane?

Basic Lemma: Sia \mathcal{V} una P.V.A. Allora:

- $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ è un'algebra di Lie con Lie-bracket

$$\{f, g\} = f\{f, g\}|_{\lambda=0} \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$$

(Notazione: $f = f + \partial\mathcal{V} \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$.)

- \mathcal{V} è un $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ -modulo, con azione

$$\{f, g\} = \{f, g\}|_{\lambda=0} \in \mathcal{V}$$

Basic Lemma: Sia \mathcal{V} una P.V.A. Allora:

- $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ è un'algebra di Lie con Lie-bracket

$$\{f, g\} = f\{g\} \big|_{\lambda=0} \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$$

(Notazione: $f = f + \partial\mathcal{V} \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$.)

- \mathcal{V} è un $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ -modulo, con azione

$$\{f, g\} = f\{g\} \big|_{\lambda=0} \in \mathcal{V}$$

Definizioni: sia \mathcal{V} una PVA su un algebra di funzioni differenziabili.

- **Spazio delle funzioni:** \mathcal{V} (*spazio delle fasi*).
- **Spazio dei funzionali locali:** $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ (*osservabili fisiche*).

Basic Lemma: Sia \mathcal{V} una P.V.A. Allora:

- $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ è un'algebra di Lie con Lie-bracket

$$\{f, g\} = f\{g\} \big|_{\lambda=0} \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$$

(Notazione: $f = f + \partial\mathcal{V} \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$.)

- \mathcal{V} è un $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ -modulo, con azione

$$\{f, g\} = f\{g\} \big|_{\lambda=0} \in \mathcal{V}$$

Definizioni: sia \mathcal{V} una PVA su un algebra di funzioni differenziabili.

- Spazio delle funzioni: \mathcal{V} (spazio delle fasi).
- Spazio dei funzionali locali: $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ (osservabili fisiche).
- Sistema di equazioni di evoluzione: $\frac{du_i}{dt} = P_i$, $i = 1, \dots, \ell$.

Basic Lemma: Sia \mathcal{V} una P.V.A. Allora:

- $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ è un'algebra di Lie con Lie-bracket

$$\{f, g\} = f\{g\} - g\{f\} \Big|_{\lambda=0} \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$$

(Notazione: $f = f + \partial\mathcal{V} \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$.)

- \mathcal{V} è un $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ -modulo, con azione

$$\{f, g\} = f\{g\} - g\{f\} \Big|_{\lambda=0} \in \mathcal{V}$$

Definizioni: sia \mathcal{V} una PVA su un algebra di funzioni differenziabili.

- Spazio delle funzioni: \mathcal{V} (spazio delle fasi).
- Spazio dei funzionali locali: $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ (osservabili fisiche).
- Sistema di equazioni di evoluzione: $\frac{du_i}{dt} = P_i$, $i = 1, \dots, \ell$.

Quindi: $\frac{df}{dt} = X_P(f)$; $X_P = \sum_{i,n} (\partial^n P_i) \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}$: campo vett. evolutivo

Basic Lemma: Sia \mathcal{V} una P.V.A. Allora:

- $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ è un'algebra di Lie con Lie-bracket

$$\{f, g\} = f\{g, \cdot\}|_{\lambda=0} \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$$

(Notazione: $f = f + \partial\mathcal{V} \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$.)

- \mathcal{V} è un $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ -modulo, con azione

$$\{f, g\} = f\{g, \cdot\}|_{\lambda=0} \in \mathcal{V}$$

Definizioni: sia \mathcal{V} una PVA su un algebra di funzioni differenziabili.

- Spazio delle funzioni: \mathcal{V} (spazio delle fasi).

Spazio dei funzionali locali: $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ (osservabili fisiche).

- Sistema di equazioni di evoluzione: $\frac{du_i}{dt} = P_i$, $i = 1, \dots, \ell$.

Quindi: $\frac{df}{dt} = X_P(f)$; $X_P = \sum_{i,n} (\partial^n P_i) \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}$: campo vett. evolutivo

- Equazione Hamiltoniana (con funzionale Hamilt. $f(h)$):

$$\frac{du_i}{dt} = \{f, u_i\} = \sum_j H_{ij}(\partial) \frac{\delta h}{\delta u_j},$$

dove: $H_{ij}(\partial) = \{u_j, \partial u_i\} \rightarrow$ è l'operatore Hamiltoniano;

$\frac{\delta h}{\delta u_j} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\partial)^n \frac{\partial h}{\partial u_j^{(n)}}$ è la derivata variazionale.

Definizioni: sia \mathcal{V} una PVA su un'algebra di funzioni differenziabili.

- **Spazio delle funzioni:** \mathcal{V} (spazio delle fasi).

Spazio dei funzionali locali: $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ (osservabili fisiche).

- Sistema di **equazioni di evoluzione:** $\frac{du_i}{dt} = P_i$, $i = 1, \dots, \ell$.

Quindi: $\frac{df}{dt} = X_P(f)$; $X_P = \sum_{i,n} (\partial^n P_i) \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}$: **campo vett. evolutivo**

- **Equazione Hamiltoniana** (con funzionale Hamilt. $\int h$):

$$\frac{du_i}{dt} = \{ \int h, u_i \} = \sum_j H_{ij}(\partial) \frac{\delta h}{\delta u_j},$$

dove: $H_{ij}(\partial) = \{ u_j, \partial u_i \} \rightarrow$ è l'**operatore Hamiltoniano**;

$\frac{\delta h}{\delta u_j} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\partial)^n \frac{\partial h}{\partial u_j^{(n)}}$ è la **derivata variazionale**.

Definizioni: sia \mathcal{V} una PVA su un'algebra di funzioni differenziabili.

- **Spazio delle funzioni:** \mathcal{V} (spazio delle fasi).

Spazio dei funzionali locali: $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ (osservabili fisiche).

- Sistema di **equazioni di evoluzione:** $\frac{du_i}{dt} = P_i$, $i = 1, \dots, \ell$.

Quindi: $\frac{df}{dt} = X_P(f)$; $X_P = \sum_{i,n} (\partial^n P_i) \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}$: **campo vett. evolutivo**

- **Equazione Hamiltoniana** (con funzionale Hamilt. $\int h$):

$$\frac{du_i}{dt} = \{ \int h, u_i \} = \sum_j H_{ij}(\partial) \frac{\delta h}{\delta u_j},$$

dove: $H_{ij}(\partial) = \{ u_{j,\partial} u_i \} \rightarrow$ è l'**operatore Hamiltoniano**;

$\frac{\delta h}{\delta u_j} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\partial)^n \frac{\partial h}{\partial u_j^{(n)}}$ è la **derivata variazionale**.

- **Integrali del moto** (per un'equaz. Hamilt.): $\int f$ s.t.

$$\frac{d}{dt} \int f = \{ \int h, \int f \} = 0.$$

Definizioni: sia \mathcal{V} una PVA su un algebra di funzioni differenziabili.

- **Spazio delle funzioni:** \mathcal{V} (spazio delle fasi).

Spazio dei funzionali locali: $\mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ (osservabili fisiche).

- Sistema di **equazioni di evoluzione:** $\frac{du_i}{dt} = P_i$, $i = 1, \dots, \ell$.

Quindi: $\frac{df}{dt} = X_P(f)$; $X_P = \sum_{i,n} (\partial^n P_i) \frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}}$: **campo vett. evolutivo**

- **Equazione Hamiltoniana** (con funzionale Hamilt. $\int h$):

$$\frac{du_i}{dt} = \{ \int h, u_i \} = \sum_j H_{ij}(\partial) \frac{\delta h}{\delta u_j},$$

dove: $H_{ij}(\partial) = \{ u_j \partial u_i \} \rightarrow$ è l'**operatore Hamiltoniano**;

$\frac{\delta h}{\delta u_j} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\partial)^n \frac{\partial h}{\partial u_j^{(n)}}$ è la **derivata variazionale**.

- **Integrali del moto** (per un'equaz. Hamilt.): $\int f$ s.t.

$$\frac{d}{dt} \int f = \{ \int h, \int f \} = 0.$$

Integrabilità: $\exists \infty$ successione, lin. indep. $\int h_0 = \int h, \int h_1 \int h_2 \dots$ t.c.

$$\{ \int h_m, \int h_n \} = 0, \quad \forall m, n.$$

Esempio: Equazione KdV su $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, u', u'', \dots]$:

$$\frac{du}{dt} = 3uu' + cu'''$$

Esempio: Equazione KdV su $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, u', u'', \dots]$:

$$\frac{du}{dt} = 3uu' + cu'''$$

Si può scrivere in **forma Hamiltoniana in due modi diversi**:

- 1 PVA: $\{u_\lambda u\} = \lambda$ (questa è la PVA GFZ),
funzionale Hamiltoniano: $\int h_0 = \frac{1}{2}u^3 + \frac{c}{2}uu''$.

- 2 PVA: $\{u_\lambda u\} = u' + 2u\lambda + c\lambda^3$ (PVA Virasoro-Magri)
funzionale Hamiltoniano: $\int h_1 = \frac{1}{2}u^2$.

Esempio: **Equazione KdV** su $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, u', u'', \dots]$:

$$\frac{du}{dt} = 3uu' + cu''' .$$

Si può scrivere in **forma Hamiltoniana in due modi diversi**:

① PVA: $\{u_\lambda u\} = \lambda$ (questa è la **PVA GFZ**),
funzionale Hamiltoniano: $\int h_0 = \frac{1}{2}u^3 + \frac{c}{2}uu''$.

② PVA: $\{u_\lambda u\} = u' + 2u\lambda + c\lambda^3$ (PVA Virasoro-Magri)
funzionale Hamiltoniano: $\int h_1 = \frac{1}{2}u^2$.

Esempio: **Equazione KdV** su $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, u', u'', \dots]$:

$$\frac{du}{dt} = 3uu' + cu''' .$$

Si può scrivere in **forma Hamiltoniana in due modi diversi**:

- ① PVA: $\{u_\lambda u\} = \lambda$ (questa è la **PVA GFZ**),
funzionale Hamiltoniano: $\int h_0 = \frac{1}{2}u^3 + \frac{c}{2}uu''$.

Infatti abbiamo:

$$\frac{du}{dt} = \{u_{\partial u}\} \rightarrow \frac{\delta h_0}{\delta u} = \partial \left(\frac{3}{2}u^2 + cu'' \right) = 3uu' + cu''' .$$

- ② PVA: $\{u_\lambda u\} = u' + 2u\lambda + c\lambda^3$ (PVA Virasoro-Magri)
funzionale Hamiltoniano: $\int h_1 = \frac{1}{2}u^2$.

Esempio: **Equazione KdV** su $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, u', u'', \dots]$:

$$\frac{du}{dt} = 3uu' + cu''.$$

Si può scrivere in **forma Hamiltoniana in due modi diversi**:

- ① PVA: $\{u_\lambda u\} = \lambda$ (questa è la **PVA GFZ**),
funzionale Hamiltoniano: $\int h_0 = \frac{1}{2}u^3 + \frac{c}{2}uu''$.

Infatti abbiamo:

$$\frac{du}{dt} = \{u_{\partial} u\} \rightarrow \frac{\delta h_0}{\delta u} = \partial \left(\frac{3}{2}u^2 + cu'' \right) = 3uu' + cu''.$$

- ② PVA: $\{u_\lambda u\} = u' + 2u\lambda + c\lambda^3$ (**PVA Virasoro-Magri**)
funzionale Hamiltoniano: $\int h_1 = \frac{1}{2}u^2$.

Esempio: **Equazione KdV** su $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, u', u'', \dots]$:

$$\frac{du}{dt} = 3uu' + cu'''$$

Si può scrivere in **forma Hamiltoniana in due modi diversi**:

- ① PVA: $\{u_\lambda u\} = \lambda$ (questa è la **PVA GFZ**),
funzionale Hamiltoniano: $\int h_0 = \frac{1}{2}u^3 + \frac{c}{2}uu''$.

Infatti abbiamo:

$$\frac{du}{dt} = \{u_\partial u\} \rightarrow \frac{\delta h_0}{\delta u} = \partial \left(\frac{3}{2}u^2 + cu'' \right) = 3uu' + cu'''$$

- ② PVA: $\{u_\lambda u\} = u' + 2u\lambda + c\lambda^3$ (**PVA Virasoro-Magri**)
funzionale Hamiltoniano: $\int h_1 = \frac{1}{2}u^2$.

Infatti abbiamo

$$\frac{du}{dt} = \{u_\partial u\} \rightarrow \frac{\delta h_1}{\delta u} = (u' + 2u\partial + c\partial^3)u = 3uu' + cu'''$$

Esempio: Equazione KdV su $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, u', u'', \dots]$:

$$\frac{du}{dt} = 3uu' + cu'''$$

Si può scrivere in **forma Hamiltoniana in due modi diversi**:

- ① PVA: $\{u_\lambda u\} = \lambda$ (questa è la **PVA GFZ**),
funzionale Hamiltoniano: $\int h_0 = \frac{1}{2}u^3 + \frac{c}{2}uu''$.
Infatti abbiamo:

$$\frac{du}{dt} = \{u_{\partial} u\} \rightarrow \frac{\delta h_0}{\delta u} = \partial \left(\frac{3}{2}u^2 + cu'' \right) = 3uu' + cu'''$$

- ② PVA: $\{u_\lambda u\} = u' + 2u\lambda + c\lambda^3$ (**PVA Virasoro-Magri**)
funzionale Hamiltoniano: $\int h_1 = \frac{1}{2}u^2$.
Infatti abbiamo

$$\frac{du}{dt} = \{u_{\partial} u\} \rightarrow \frac{\delta h_1}{\delta u} = (u' + 2u\partial + c\partial^3)u = 3uu' + cu'''$$

Nota: in fatto di avere due forme Hamiltoniane *compatibili* è un punto cruciale per dimostrare l'integrabilità con lo **schema di Lenard**.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili normale
- 2 Due strutture di PVA compatibili su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità: $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA compatibili su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità: $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**

Definizione: \mathcal{V} **normale:** $\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ è suriettiva in ogni grado.

Ipotesi debole: ogni \mathcal{V} si può estendere ad un'algebra normale (aggiungendo degli "integrali").

- 2 Due strutture di PVA compatibili su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità: $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0,$

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**

Definizione: \mathcal{V} **normale:** $\frac{\partial}{\partial u_i^{(n)}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ è suriettiva in ogni grado.

Implica che il complesso del calcolo variazionale è **esatto**. In particolare: la **derivata di Frechet** di F , $(D_F(\partial)P)_i = \sum_{j,n} \frac{\partial F_j}{\partial u_j^{(n)}} \partial^n P_j$ è auto-aggiunta $D_F(\partial) = D_F^*(\partial)$ se e solo se $F = \frac{\delta f}{\delta u}$.

- 2 Due strutture di PVA compatibili su \mathcal{V} : $\{\cdot, \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità: $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA compatibili su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità: $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità: $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.

compatibili: le combinazioni lineari $\alpha\{\cdot, \lambda \cdot\}_H + \beta\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$ definiscono una PVA su \mathcal{V} .

- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità: $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità: $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è **non-degenere**.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità: $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è **non-degenere**.

Def: $K(\partial)$ **non-degenere**: $M(\partial) = -M^*(\partial)$ & $K(\partial)M(\partial)K(\partial) = 0 \Rightarrow M(\partial) = 0$.
Ipotesi debole (e facile da verificare); per rango 1 è sempre vera.

- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità: $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali
 $\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è **non-degenere**.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità: $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è **non-degenere**.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità: $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è **non-degenere**.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.

Nota: equazione di evoluzione che può essere scritta in due forme Hamiltoniane:

$$\frac{du_i}{dt} = \{\int h_0, u_i\}_H = \{\int h_1, u_i\}_K$$

- 5 Condizione di ortogonalità: $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è **non-degenere**.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità: $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è **non-degenere**.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 **Condizione di ortogonalità:** $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è **non-degenere**.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 **Condizione di ortogonalità:** $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Notazione: la relazione di ortogonalità è: $F \perp P \Leftrightarrow \int F \cdot P = 0$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali $\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è **non-degenere**.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 **Condizione di ortogonalità:** $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è **non-degenere**.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 **Condizione di ortogonalità:** $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è **non-degenere**.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 **Condizione di ortogonalità:** $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Teorema: (Schema di integrabilità di Lenard)

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è un' algebra di funzioni differenziabili **normale**
- 2 Due strutture di PVA **compatibili** su \mathcal{V} : $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è **non-degenere**.
- 4 Siano $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ t.c. $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 **Condizione di ortogonalità:** $\left(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u}\right)^\perp \subset \text{Im} (K(\partial))$.

Allora: \exists una successione infinita di funzionali locali

$\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

In particolare, $\{\int h_m, \int h_n\}_H = \{\int h_m, \int h_n\}_K = 0, \quad \forall m, n \geq 0$.

Concl.: la gerarchia di equazioni Hamiltoniane $\frac{du_i}{dt_n} = \{\int h_n, u_i\}_H$ è **integrabile**.

Lenard scheme

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è normale.
- 2 $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$ sono strutture di PVA compatibili.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ sono t.c.
 $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità:
 $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im } K(\partial)$.

Allora:

$\exists \int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

Quindi: gerarchia integrabile

$$\frac{du_j}{dt_n} = \{\int h_n, u_j\}_H.$$

Esempi.

Lenard scheme

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è normale.
- 2 $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$ sono strutture di PVA compatibili.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ sono t.c.
 $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità:
 $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im } K(\partial)$.

Allora:

$\exists \int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

Quindi: gerarchia integrabile

$$\frac{du_j}{dt_n} = \{\int h_n, u_j\}_H.$$

Esempi: equazione KdV

Spazio delle funzioni: $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, u', u'', \dots]$.

Equazione:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = 3uu' + cu''' &= \underbrace{\partial}_{K(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{\frac{1}{2}(u^3 + cuu'')}_{\int h_2} \\ &= \underbrace{u' + 2u\partial + c\partial^3}_{H(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{\frac{1}{2}u^2}_{\int h_1}. \end{aligned}$$

Abbiamo inoltre

$$\underbrace{\partial}_{K(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{\frac{1}{2}u^2}_{\int h_1} = \underbrace{u' + 2u\partial + c\partial^3}_{H(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{u}_{\int h_0} = u'.$$

Condizione di ortogonalità:

$$(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset 1^\perp = \partial\mathcal{V} = \text{Im } (K(\partial)).$$

Conclusione: l'eq. KdV è integrabile.

Lenard scheme

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è normale.
- 2 $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$ sono strutture di PVA compatibili.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ sono t.c.
 $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità:
 $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im } K(\partial)$.

Allora:

$\exists \int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

Quindi: gerarchia integrabile

$$\frac{du_j}{dt_n} = \{\int h_n, u_j\}_H.$$

Esempi: equazione KdV

Spazio delle funzioni: $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, u', u'', \dots]$.
Equazione:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = 3uu' + cu''' &= \underbrace{\partial}_{K(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{\frac{1}{2}(u^3 + cuu'')}_{\int h_2} \\ &= \underbrace{u' + 2u\partial + c\partial^3}_{H(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{\frac{1}{2}u^2}_{\int h_1}. \end{aligned}$$

Abbiamo inoltre

$$\underbrace{\partial}_{K(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{\frac{1}{2}u^2}_{\int h_1} = \underbrace{u' + 2u\partial + c\partial^3}_{H(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{u}_{\int h_0} = u'.$$

Condizione di ortogonalità:

$$(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset 1^\perp = \partial\mathcal{V} = \text{Im } (K(\partial)).$$

Conclusione: l'eq. KdV è integrabile.

Lenard scheme

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è normale.
- 2 $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$ sono strutture di PVA compatibili.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ sono t.c.
 $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità:
 $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im } K(\partial)$.

Allora:

$\exists \int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

Quindi: gerarchia integrabile

$$\frac{du_j}{dt_n} = \{\int h_n, u_j\}_H.$$

Esempi: equazione KdV

Spazio delle funzioni: $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, u', u'', \dots]$.
Equazione:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = 3uu' + cu''' &= \underbrace{\partial}_{K(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{\frac{1}{2}(u^3 + cuu'')}_{\int h_2} \\ &= \underbrace{u' + 2u\partial + c\partial^3}_{H(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{\frac{1}{2}u^2}_{\int h_1}. \end{aligned}$$

Abbiamo inoltre

$$\underbrace{\partial}_{K(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{\frac{1}{2}u^2}_{\int h_1} = \underbrace{u' + 2u\partial + c\partial^3}_{H(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{u}_{\int h_0} = u'.$$

Condizione di ortogonalità:

$$(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset 1^\perp = \partial\mathcal{V} = \text{Im } (K(\partial)).$$

Conclusione: l'eq. KdV è integrabile.

Lenard scheme

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è normale.
- 2 $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$ sono strutture di PVA compatibili.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ sono t.c.
 $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità:
 $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im } K(\partial)$.

Allora:

$\exists \int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

Quindi: gerarchia integrabile

$$\frac{du_j}{dt_n} = \{\int h_n, u_j\}_H.$$

Esempi: equazione KdV

Spazio delle funzioni: $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, u', u'', \dots]$.

Equazione:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = 3uu' + cu''' &= \underbrace{\partial}_{K(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{\frac{1}{2}(u^3 + cuu'')}_{\int h_2} \\ &= \underbrace{u' + 2u\partial + c\partial^3}_{H(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{\frac{1}{2}u^2}_{\int h_1}. \end{aligned}$$

Abbiamo inoltre

$$\underbrace{\partial}_{K(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{\frac{1}{2}u^2}_{\int h_1} = \underbrace{u' + 2u\partial + c\partial^3}_{H(\partial)} \frac{\delta}{\delta u} \underbrace{u}_{\int h_0} = u'.$$

Condizione di ortogonalità:

$$(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset 1^\perp = \partial\mathcal{V} = \text{Im } (K(\partial)).$$

Conclusione: l'eq. KdV è integrabile.

Lenard scheme

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è normale.
- 2 $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$ sono strutture di PVA compatibili.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ sono t.c.
 $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità:
 $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im } K(\partial)$.

Allora:

$\exists \int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

Quindi: gerarchia integrabile

$$\frac{du_j}{dt_n} = \{\int h_n, u_j\}_H.$$

Esempi

In modo analogo si può dimostrare l'integrabilità dell'equazione HD:

$$\frac{du}{dt} = (u^{-1/2})'''$$

e del sistema di equazioni CNW:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = cu''' + 3uu' + vv' \\ \frac{dv}{dt} = \partial(uv) \end{cases}$$

Lenard scheme

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è normale.
- 2 $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$ sono strutture di PVA compatibili.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ sono t.c.
 $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità:
 $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im } K(\partial)$.

Allora:

$\exists \int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

Quindi: gerarchia integrabile

$$\frac{du_j}{dt_n} = \{\int h_n, u_j\}_H.$$

Esempi

In modo analogo si può dimostrare l'integrabilità dell'equazione HD:

$$\frac{du}{dt} = (u^{-1/2})'''$$

e del sistema di equazioni CNW:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = cu''' + 3uu' + vv' \\ \frac{dv}{dt} = \partial(uv) \end{cases}$$

Lenard scheme

Ipotesi:

- 1 \mathcal{V} è normale.
- 2 $\{\cdot, \lambda \cdot\}_H$ e $\{\cdot, \lambda \cdot\}_K$ sono strutture di PVA compatibili.
- 3 $K(\partial) = (\{u_{j\partial} u_i\}_K)_{i,j=1,\dots,\ell}$ è non-degenere.
- 4 $\int h_0, \int h_1 \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ sono t.c.
 $\{\int h_0, \cdot\}_H = \{\int h_1, \cdot\}_K$.
- 5 Condizione di ortogonalità:
 $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} + \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im } K(\partial)$.

Allora:

$\exists \int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots \in \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$, tali che

$$\{\int h_n, \cdot\}_H = \{\int h_{n+1}, \cdot\}_K, \quad \forall n \geq 0.$$

Quindi: gerarchia integrabile

$$\frac{du_j}{dt_n} = \{\int h_n, u_j\}_H.$$

Esempi

In modo analogo si può dimostrare l'integrabilità dell'equazione HD:

$$\frac{du}{dt} = (u^{-1/2})'''$$

e del sistema di equazioni CNW:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = cu''' + 3uu' + vv' \\ \frac{dv}{dt} = \partial(uv) \end{cases}$$

Nota: si può procedere in modo sistematico per cercare nuove equazioni integrabili.

Esempio: sistema CNW di tipo HD

Spazio delle funzioni: $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, v^{\pm 1}, u', v', u'', v'']$. Strutture di PVA compatibili:

$$\begin{aligned}\{u_\lambda u\}_K &= (\partial + 2\lambda)u, \quad \{v_\lambda v\}_K = 0, \quad \{u_\lambda v\}_K = (\partial + \lambda)v, \quad \{v_\lambda u\}_K = \lambda v, \\ \{u_\lambda u\}_H &= \lambda + c\lambda^3, \quad \{v_\lambda v\}_H = \lambda, \quad \{u_\lambda v\}_H = \{v_\lambda u\}_H = 0.\end{aligned}$$

Operatori Hamiltoniani (per $c \in \mathbb{C}$):

$$H(\partial) = \begin{pmatrix} \partial + c\partial^3 & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}, \quad K(\partial) = \begin{pmatrix} u' + 2u\partial & v\partial \\ v' + v\partial & 0 \end{pmatrix}.$$

Siano $\int h_0 = \int v$, $\int h_1 = \int \frac{u}{v}$.

Abbiamo: $K(\partial) \frac{\delta h_0}{\delta u} = H(\partial) \frac{\delta h_0}{\delta u} = K(\partial) \frac{\delta h_1}{\delta u} = 0$.

Inoltre abbiamo $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} \oplus \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im}(K(\partial))$.

Quindi abbiamo una nuova gerarchia integrabile:

$$\frac{du}{dt} = H(\partial) \frac{\delta h_{n-1}}{\delta u} = K(\partial) \frac{\delta h_n}{\delta u}, \quad n \geq 0.$$

La prima equazione della gerarchia è:

$$\frac{du}{dt_1} = (\partial + c\partial^3) \left(\frac{1}{v} \right), \quad \frac{dv}{dt_1} = -\partial \left(\frac{u}{v^2} \right)$$

che chiamiamo il sistema CNW di tipo HD.

Esempio: sistema CNW di tipo HD

Spazio delle funzioni: $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, v^{\pm 1}, u', v', u'', v'']$. Strutture di PVA compatibili:

$$\begin{aligned}\{u_\lambda u\}_K &= (\partial + 2\lambda)u, \quad \{v_\lambda v\}_K = 0, \quad \{u_\lambda v\}_K = (\partial + \lambda)v, \quad \{v_\lambda u\}_K = \lambda v, \\ \{u_\lambda u\}_H &= \lambda + c\lambda^3, \quad \{v_\lambda v\}_H = \lambda, \quad \{u_\lambda v\}_H = \{v_\lambda u\}_H = 0.\end{aligned}$$

Operatori Hamiltoniani (per $c \in \mathbb{C}$):

$$H(\partial) = \begin{pmatrix} \partial + c\partial^3 & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}, \quad K(\partial) = \begin{pmatrix} u' + 2u\partial & v\partial \\ v' + v\partial & 0 \end{pmatrix}.$$

Siano $\int h_0 = \int v$, $\int h_1 = \int \frac{u}{v}$.

Abbiamo: $K(\partial) \frac{\delta h_0}{\delta u} = H(\partial) \frac{\delta h_0}{\delta u} = K(\partial) \frac{\delta h_1}{\delta u} = 0$.

Inoltre abbiamo $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} \oplus \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im}(K(\partial))$.

Quindi abbiamo una nuova gerarchia integrabile:

$$\frac{du}{dt} = H(\partial) \frac{\delta h_{n-1}}{\delta u} = K(\partial) \frac{\delta h_n}{\delta u}, \quad n \geq 0.$$

La prima equazione della gerarchia è:

$$\frac{du}{dt_1} = (\partial + c\partial^3) \left(\frac{1}{v} \right), \quad \frac{dv}{dt_1} = -\partial \left(\frac{u}{v^2} \right)$$

che chiamiamo il sistema CNW di tipo HD.

Esempio: sistema CNW di tipo HD

Spazio delle funzioni: $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, v^{\pm 1}, u', v', u'', v'']$. Strutture di PVA compatibili:

$$\begin{aligned}\{u_\lambda u\}_K &= (\partial + 2\lambda)u, \quad \{v_\lambda v\}_K = 0, \quad \{u_\lambda v\}_K = (\partial + \lambda)v, \quad \{v_\lambda u\}_K = \lambda v, \\ \{u_\lambda u\}_H &= \lambda + c\lambda^3, \quad \{v_\lambda v\}_H = \lambda, \quad \{u_\lambda v\}_H = \{v_\lambda u\}_H = 0.\end{aligned}$$

Operatori Hamiltoniani (per $c \in \mathbb{C}$):

$$H(\partial) = \begin{pmatrix} \partial + c\partial^3 & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}, \quad K(\partial) = \begin{pmatrix} u' + 2u\partial & v\partial \\ v' + v\partial & 0 \end{pmatrix}.$$

Siano $\int h_0 = \int v$, $\int h_1 = \int \frac{u}{v}$.

Abbiamo: $K(\partial) \frac{\delta h_0}{\delta u} = H(\partial) \frac{\delta h_0}{\delta u} = K(\partial) \frac{\delta h_1}{\delta u} = 0$.

Inoltre abbiamo $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} \oplus \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im}(K(\partial))$.

Quindi abbiamo una nuova gerarchia integrabile:

$$\frac{du}{dt} = H(\partial) \frac{\delta h_{n-1}}{\delta u} = K(\partial) \frac{\delta h_n}{\delta u}, \quad n \geq 0.$$

La prima equazione della gerarchia è:

$$\frac{du}{dt_1} = (\partial + c\partial^3) \left(\frac{1}{v} \right), \quad \frac{dv}{dt_1} = -\partial \left(\frac{u}{v^2} \right)$$

che chiamiamo il sistema CNW di tipo HD.

Esempio: sistema CNW di tipo HD

Spazio delle funzioni: $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, v^{\pm 1}, u', v', u'', v'']$. Strutture di PVA compatibili:

$$\begin{aligned}\{u_\lambda u\}_K &= (\partial + 2\lambda)u, \quad \{v_\lambda v\}_K = 0, \quad \{u_\lambda v\}_K = (\partial + \lambda)v, \quad \{v_\lambda u\}_K = \lambda v, \\ \{u_\lambda u\}_H &= \lambda + c\lambda^3, \quad \{v_\lambda v\}_H = \lambda, \quad \{u_\lambda v\}_H = \{v_\lambda u\}_H = 0.\end{aligned}$$

Operatori Hamiltoniani (per $c \in \mathbb{C}$):

$$H(\partial) = \begin{pmatrix} \partial + c\partial^3 & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}, \quad K(\partial) = \begin{pmatrix} u' + 2u\partial & v\partial \\ v' + v\partial & 0 \end{pmatrix}.$$

Siano $\int h_0 = \int v$, $\int h_1 = \int \frac{u}{v}$.

Abbiamo: $K(\partial) \frac{\delta h_0}{\delta u} = H(\partial) \frac{\delta h_0}{\delta u} = K(\partial) \frac{\delta h_1}{\delta u} = 0$.

Inoltre abbiamo $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} \oplus \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im}(K(\partial))$.

Quindi abbiamo una **nuova gerarchia integrabile**:

$$\frac{du}{dt} = H(\partial) \frac{\delta h_{n-1}}{\delta u} = K(\partial) \frac{\delta h_n}{\delta u}, \quad n \geq 0.$$

La prima equazione della gerarchia è:

$$\frac{du}{dt_1} = (\partial + c\partial^3) \left(\frac{1}{v} \right), \quad \frac{dv}{dt_1} = -\partial \left(\frac{u}{v^2} \right)$$

che chiamiamo il sistema CNW di tipo HD.

Esempio: sistema CNW di tipo HD

Spazio delle funzioni: $\mathcal{V} = \mathbb{C}[u, v^{\pm 1}, u', v', u'', v'']$. Strutture di PVA compatibili:

$$\begin{aligned}\{u_\lambda u\}_K &= (\partial + 2\lambda)u, \quad \{v_\lambda v\}_K = 0, \quad \{u_\lambda v\}_K = (\partial + \lambda)v, \quad \{v_\lambda u\}_K = \lambda v, \\ \{u_\lambda u\}_H &= \lambda + c\lambda^3, \quad \{v_\lambda v\}_H = \lambda, \quad \{u_\lambda v\}_H = \{v_\lambda u\}_H = 0.\end{aligned}$$

Operatori Hamiltoniani (per $c \in \mathbb{C}$):

$$H(\partial) = \begin{pmatrix} \partial + c\partial^3 & 0 \\ 0 & \partial \end{pmatrix}, \quad K(\partial) = \begin{pmatrix} u' + 2u\partial & v\partial \\ v' + v\partial & 0 \end{pmatrix}.$$

Siano $\int h_0 = \int v$, $\int h_1 = \int \frac{u}{v}$.

Abbiamo: $K(\partial) \frac{\delta h_0}{\delta u} = H(\partial) \frac{\delta h_0}{\delta u} = K(\partial) \frac{\delta h_1}{\delta u} = 0$.

Inoltre abbiamo $(\mathbb{C} \frac{\delta h_0}{\delta u} \oplus \mathbb{C} \frac{\delta h_1}{\delta u})^\perp \subset \text{Im}(K(\partial))$.

Quindi abbiamo una **nuova gerarchia integrabile**:

$$\frac{du}{dt} = H(\partial) \frac{\delta h_{n-1}}{\delta u} = K(\partial) \frac{\delta h_n}{\delta u}, \quad n \geq 0.$$

La prima equazione della gerarchia è:

$$\frac{du}{dt_1} = (\partial + c\partial^3) \left(\frac{1}{v} \right), \quad \frac{dv}{dt_1} = -\partial \left(\frac{u}{v^2} \right)$$

che chiamiamo il **sistema CNW di tipo HD**.

Riferimenti bibliografici:

- DS, Kac, *Lie conformal algebra cohomology and the variational complex* (2008)
- Barakat, DS, Kac *Poisson vertex algebras in the theory of Hamiltonian equations* (2009)

The End