Sistemi bi-Hamiltoniani integrabili

Alberto De Sole

Università di Roma “La Sapienza”

INdAM (Roma), 24-28 Maggio 2010

Sistemi bi-Hamiltoniani integrabili

Alberto De Sole

Università di Roma “La Sapienza”

INdAM (Roma), 24-28 Maggio 2010

Lavoro in collaborazione con V. Kac & M. Wakimoto

Archive 1004.5387

slides disponibili a:

www.mat.uniroma1.it/∼desole

Equazioni di Hamilton in meccanica classica, nelle variabili

- $q_1, \dots, q_n$: variabili di posizione,
- $p_1, \dots, p_n$: variabili momento,
- $z_1, \dots, z_r$: parametri (costanti del moto):

$$\dot{q}_i \left(= \frac{dq_i}{dt}\right) = \frac{\partial h}{\partial p_i} \,, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial h}{\partial q_i} \,, \quad \dot{z}_i = 0 \,.$$

$h(q_i, p_i, z)$: e' la **funzione Hamiltoniana.**

In forma vettoriale, in $M = \mathbb{R}^\ell \ni q = (q_i, p_j, z_k)$: spazio delle fasi, le eq. di Hamilton sono:

$$\dot{q} = J \cdot \nabla h(q) \,, \quad \nabla h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial q_\ell} \end{pmatrix} \,, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

J è l' **operatore Hamiltoniano canonico** e $h(q)$ è la **funzione Hamiltoniana**

Equazioni di Hamilton in meccanica classica, nelle variabili

- $q_1, \dots, q_n$: variabili di posizione,
- $p_1, \dots, p_n$: variabili momento,
- $z_1, \dots, z_r$: parametri (costanti del moto):

$$\dot{q}_i \left(= \frac{dq_i}{dt}\right) = \frac{\partial h}{\partial p_i}\,, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial h}{\partial q_i}\,, \quad \dot{z}_i = 0\,.$$

$h(q_i, p_i, z)$: e' la **funzione Hamiltoniana.**
In forma vettoriale, in $M = \mathbb{R}^\ell \ni q = (q_i, p_j, z_k)$: spazio delle fasi, le eq. di Hamilton sono:

$$\dot{q} = J \cdot \nabla h(q)\,, \quad \nabla h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial q_\ell} \end{pmatrix}\,, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

J è l' **operatore Hamiltoniano canonico** e $h(q)$ è la **funzione Hamiltoniana**

Formulazione più generale (e covariante) della Meccanica Classica:

- M: varietà differenzioale di dim=n (**Spazio delle Fasi**). Localmente $M \simeq \mathbb{R}^n \ni q = (q_1, \dots, q_n)$.
- $h(q): M \to \mathbb{R}$, **funzione Hamiltoniana** $\in C^\infty(M)$
- H: **operatore Hamiltoniano**; localmente: $H(q) = (H_{ij}(q))_{i,j=1}^n \in Mat_{n\times n}$ con *certe proprietà*

Equazioni Hamiltoniane (localmente): $\dot{q} = H(q) \cdot \nabla h(q)$.

Definizione: Una Struttura Hamiltoniana su M è una struttura di **Algebra di Poisson** su $\mathcal{F} = C^\infty(M)$ (lo spazio delle **Osservabili Fisiche**), ovvero $\{\cdot\,,\cdot\}_H : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $f, g \mapsto \{f, g\}_H$, che soddisfa: *antisimmetria*, *identità di Jacobi* e *regola di Leibniz*.

L' operatore Hamiltoniano associato è (localmente): $H_{ij}(q) = \{q_j, q_i\}_H$.
Viceversa, dato l'operatore Hamiltoniano $H(q)$, si ricostruisce la struttura Hamiltoniana tramite la formula:

$$\{f, g\}_H = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial q_j} H_{ji}(q) \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \left(= \nabla g \cdot H(q) \nabla f \right)$$

Equazioni Hamiltoniane (prive di coordinate): $\frac{df}{dt} = \{h, f\}_H$, $f \in \mathcal{F}$.

Formulazione più generale (e covariante) della Meccanica Classica:

- M: varietà differenzioale di dim$=n$ (**Spazio delle Fasi**). Localmente $M \simeq \mathbb{R}^n \ni q = (q_1, \dots, q_n)$.
- $h(q) : M \to \mathbb{R}$, **funzione Hamiltoniana** $\in C^\infty(M)$
- H: **operatore Hamiltoniano**; localmente: $H(q) = (H_{ij}(q))_{i,j=1}^n \in Mat_{n\times n}$ con *certe proprietà*

Equazioni Hamiltoniane (localmente): $\dot{q} = H(q) \cdot \nabla h(q)$.

Definizione: Una Struttura Hamiltoniana su M è una struttura di **Algebra di Poisson** su $\mathcal{F} = C^\infty(M)$ (lo spazio delle **Osservabili Fisiche**), ovvero $\{\cdot\,,\,\cdot\}_H : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $f, g \mapsto \{f, g\}_H$, che soddisfa: *antisimmetria*, *identità di Jacobi* e *regola di Leibniz*.

L' operatore Hamiltoniano associato è (localmente): $H_{ij}(q) = \{q_j, q_i\}_H$.
Viceversa, dato l'operatore Hamiltoniano $H(q)$, si ricostruisce la struttura Hamiltoniana tramite la formula:

$$\{f, g\}_H = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g}{\partial q_j} H_{ji}(q) \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \left(= \nabla g \cdot H(q) \nabla f \right)$$

Equazioni Hamiltoniane (prive di coordinate): $\frac{df}{dt} = \{h, f\}_H$, $f \in \mathcal{F}$.

Formulazione più generale (e covariante) della Meccanica Classica:

- M: varietà differenzioale di dim=n (**Spazio delle Fasi**). Localmente $M \simeq \mathbb{R}^n \ni q = (q_1, \ldots, q_n)$.
- $h(q) : M \to \mathbb{R}$, **funzione Hamiltoniana** $\in C^\infty(M)$
- H: **operatore Hamiltoniano**; localmente: $H(q) = (H_{ij}(q))_{i,j=1}^n \in Mat_{n\times n}$ con *certe proprietà*

Equazioni Hamiltoniane (localmente): $\dot{q} = H(q) \cdot \nabla h(q)$.

<u>**Definizione:**</u> Una Struttura Hamiltoniana su M è una struttura di **Algebra di Poisson** su $\mathcal{F} = C^\infty(M)$ (lo spazio delle **Osservabili Fisiche**), ovvero $\{\cdot\,,\,\cdot\}_H : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}\ ,\quad f, g \mapsto \{f, g\}_H$, che soddisfa: *antisimmetria*, *identità di Jacobi* e *regola di Leibniz*.

L' operatore Hamiltoniano associato è (localmente): $H_{ij}(q) = \{q_j, q_i\}_H$.

Viceversa, dato l'operatore Hamiltoniano $H(q)$, si ricostruisce la struttura Hamiltoniana tramite la formula:

$$\{f, g\}_H = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g}{\partial q_j} H_{ji}(q) \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \left(= \nabla g \cdot H(q) \nabla f \right)$$

Equazioni Hamiltoniane (prive di coordinate): $\frac{df}{dt} = \{h, f\}_H\ ,\ f \in \mathcal{F}$

Formulazione più generale (e covariante) della Meccanica Classica:

- M: varietà differenzioale di dim=n (**Spazio delle Fasi**). Localmente $M \simeq \mathbb{R}^n \ni q = (q_1, \ldots, q_n)$.
- $h(q) : M \to \mathbb{R}$, **funzione Hamiltoniana** $\in C^\infty(M)$
- H: **operatore Hamiltoniano**; localmente: $H(q) = (H_{ij}(q))_{i,j=1}^n \in Mat_{n\times n}$ con *certe proprietà*

Equazioni Hamiltoniane (localmente): $\dot{q} = H(q) \cdot \nabla h(q)$.

Definizione: Una Struttura Hamiltoniana su M è una struttura di **Algebra di Poisson** su $\mathcal{F} = C^\infty(M)$ (lo spazio delle **Osservabili Fisiche**), ovvero $\{\cdot\,,\,\cdot\}_H : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}\ ,\quad f, g \mapsto \{f, g\}_H$, che soddisfa: *antisimmetria*, *identità di Jacobi* e *regola di Leibniz*.

L' operatore Hamiltoniano associato è (localmente): $H_{ij}(q) = \{q_j, q_i\}_H$.

Viceversa, dato l'operatore Hamiltoniano $H(q)$, si ricostruisce la struttura Hamiltoniana tramite la formula:

$$\{f, g\}_H = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g}{\partial q_j} H_{ji}(q) \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \big(= \nabla g \cdot H(q) \nabla f \big)$$

Equazioni Hamiltoniane (prive di coordinate): $\frac{df}{dt} = \{h, f\}_H\ ,\ f \in \mathcal{F}$

Formulazione più generale (e covariante) della Meccanica Classica:

- M: varietà differenzioale di dim=n (**Spazio delle Fasi**). Localmente $M \simeq \mathbb{R}^n \ni q = (q_1, \dots, q_n)$.
- $h(q) : M \to \mathbb{R}$, **funzione Hamiltoniana** $\in C^\infty(M)$
- H: **operatore Hamiltoniano**; localmente: $H(q) = (H_{ij}(q))_{i,j=1}^n \in Mat_{n\times n}$ con *certe proprietà*

Equazioni Hamiltoniane (localmente): $\dot{q} = H(q) \cdot \nabla h(q)$.

Definizione: Una Struttura Hamiltoniana su M è una struttura di **Algebra di Poisson** su $\mathcal{F} = C^\infty(M)$ (lo spazio delle **Osservabili Fisiche**), ovvero $\{\cdot\,,\,\cdot\}_H \,:\, \mathcal{F}\times\mathcal{F} \to \mathcal{F}\,,\quad f,g \mapsto \{f,g\}_H$, che soddisfa: *antisimmetria*, *identità di Jacobi* e *regola di Leibniz*.

L' operatore Hamiltoniano associato è (localmente): $H_{ij}(q) = \{q_j, q_i\}_H$.

Viceversa, dato l'operatore Hamiltoniano $H(q)$, si ricostruisce la struttura Hamiltoniana tramite la formula:

$$\{f,g\}_H = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g}{\partial q_j} H_{ji}(q) \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \big(= \nabla g \cdot H(q) \nabla f\big)$$

Equazioni Hamiltoniane (prive di coordinate): $\frac{df}{dt} = \{h, f\}_H\,,\ f \in \mathcal{F}$.

Teorema di Darboux (1882): Una qualunque struttura Hamiltoniana di *rango costante* $\{\cdot\,,\,\cdot\}_H$, localmente intorno ad ogni punto $q_0 \in M$, ha la forma, in un opportuno sistema di coordinate $q = (q_1, \ldots, q_n)$,

$$H(q) = J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad q \in U_{q_0} \subset M \,.$$

Conclusione: $\exists!$ operatore Hamiltoniano in Meccanica Classica, a meno di cambio di coordinate (ovvero l'*operatore canonico* $H(q) = J$)
Nota: La formulazione generale (covariante) della Meccanica Classica ha il vantaggio di estendersi in due direzioni:

Teorema di Darboux (1882): Una qualunque struttura Hamiltoniana di *rango costante* $\{\cdot\,,\,\cdot\}_H$, localmente intorno ad ogni punto $q_0 \in M$, ha la forma, in un opportuno sistema di coordinate $q = (q_1, \dots, q_n)$,

$$H(q) = J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q \in U_{q_0} \subset M\,.$$

Conclusione: $\exists!$ operatore Hamiltoniano in Meccanica Classica, a meno di cambio di coordinate (ovvero l'*operatore canonico* $H(q) = J$)

Nota: La formulazione generale (covariante) della Meccanica Classica ha il vantaggio di estendersi in due direzioni:

Teorema di Darboux (1882): Una qualunque struttura Hamiltoniana di *rango costante* $\{\cdot\,,\,\cdot\}_H$, localmente intorno ad ogni punto $q_0 \in M$, ha la forma, in un opportuno sistema di coordinate $q = (q_1, \dots, q_n)$,

$$H(q) = J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q \in U_{q_0} \subset M\,.$$

Conclusione: $\exists!$ operatore Hamiltoniano in Meccanica Classica, a meno di cambio di coordinate (ovvero l'*operatore canonico* $H(q) = J$)
Nota: La formulazione generale (covariante) della Meccanica Classica ha il vantaggio di estendersi in due direzioni:

- *Quantizzazione*: Meccanica Quantistica (strutt. algebrica: Algebra Associativa)
- *Affinizzazione*: Teoria dei Campi Classica (strutt. alg.: Algebra di Vertice di Poisson (PVA) [DS, Kac, 2005])
- *Quant+Affin*: Teoria dei Campi Quantistica (struttura algebrica: Algebra di Vertice [Borcherds, 1987])

Teorema di Darboux (1882): Una qualunque struttura Hamiltoniana di *rango costante* $\{\cdot\,,\,\cdot\}_H$, localmente intorno ad ogni punto $q_0 \in M$, ha la forma, in un opportuno sistema di coordinate $q = (q_1, \dots, q_n)$,

$$H(q) = J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,, \quad q \in U_{q_0} \subset M \,.$$

Conclusione: $\exists!$ operatore Hamiltoniano in Meccanica Classica, a meno di cambio di coordinate (ovvero l'*operatore canonico* $H(q) = J$)

Nota: La formulazione generale (covariante) della Meccanica Classica ha il vantaggio di estendersi in due direzioni:

- *Quantizzazione*: Meccanica Quantistica (strutt. algebrica: Algebra Associativa)
- *Affinizzazione*: Teoria dei Campi Classica (strutt. alg.: Algebra di Vertice di Poisson (PVA) [DS, Kac, 2005])
- *Quant+Affin*: Teoria dei Campi Quantistica (struttura algebrica: Algebra di Vertice [Borcherds, 1987])

Teorema di Darboux (1882): Una qualunque struttura Hamiltoniana di *rango costante* $\{\cdot\,,\,\cdot\}_H$, localmente intorno ad ogni punto $q_0 \in M$, ha la forma, in un opportuno sistema di coordinate $q = (q_1, \dots, q_n)$,

$$H(q) = J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q \in U_{q_0} \subset M\,.$$

Conclusione: $\exists!$ operatore Hamiltoniano in Meccanica Classica, a meno di cambio di coordinate (ovvero l'*operatore canonico* $H(q) = J$)
Nota: La formulazione generale (covariante) della Meccanica Classica ha il vantaggio di estendersi in due direzioni:

- *Quantizzazione*: Meccanica Quantistica (strutt. algebrica: Algebra Associativa)
- *Affinizzazione*: Teoria dei Campi Classica (strutt. alg.: Algebra di Vertice di Poisson (PVA) [DS, Kac, 2005])
- *Quant+Affin*: Teoria dei Campi Quantistica (struttura algebrica: Algebra di Vertice [Borcherds, 1987])

Teorema di Darboux (1882): Una qualunque struttura Hamiltoniana di *rango costante* $\{\cdot\,,\,\cdot\}_H$, localmente intorno ad ogni punto $q_0 \in M$, ha la forma, in un opportuno sistema di coordinate $q = (q_1, \dots, q_n)$,

$$H(q) = J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} & 0 \\ -\mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q \in U_{q_0} \subset M\,.$$

Conclusione: $\exists!$ operatore Hamiltoniano in Meccanica Classica, a meno di cambio di coordinate (ovvero l'*operatore canonico* $H(q) = J$)

Nota: La formulazione generale (covariante) della Meccanica Classica ha il vantaggio di estendersi in due direzioni:

- *Quantizzazione*: Meccanica Quantistica (strutt. algebrica: Algebra Associativa)
- *Affinizzazione*: Teoria dei Campi Classica (strutt. alg.: Algebra di Vertice di Poisson (PVA) [DS, Kac, 2005])
- *Quant+Affin*: Teoria dei Campi Quantistica (struttura algebrica: Algebra di Vertice [Borcherds, 1987])

dimensione ∞: Teoria dei campi classica (in forma Hamiltoniana)

(Formulazione originaria:) un sistema di equazioni Hamiltoniane in 1 variablie indip x e ℓ variabili dipendenti $q_1(x), \dots, q_\ell(x) \in \mathcal{F} = Fun(U)$:

$$\frac{\partial q_i(x,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\ell} H_{ij}\Big(\frac{d}{dx}\Big) \frac{\delta h(q)}{\delta q_j(x)} \ \Big(= H \frac{\delta h}{\delta q} \Big) .$$

- $h(q)$ è il funzionale Hamiltoniano, ovvero un *funzionale locale*

$$h(q) = \int h(q(x), q'(x), \dots, q^{(n)}(x))dx : \mathcal{F} \to \mathbb{R} .$$

  (spazio delle **Osservabili fisiche**)

- $\frac{\delta}{\delta q_i(x)}$ è la derivata variazionale:

$$\frac{\delta}{\delta q_i(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{d}{dx}\Big)^n \frac{\partial}{\partial q_i^{(n)}(x)} .$$

- $H = \big(H_{i,j}(d/dx)\big)_{i,j=1}^{\ell}$ è l'Operatore Hamiltoniano, che soddisfa:
  - *antiautoaggiunto* $H^*(d/dx) = -H(d/dx)$,
  - *ulteriore condizione* $[H, H]_{SB}$.

Ex: eq KdV (1887) $\frac{dq}{dt} = 3q(x)q'(x) + cq'''(x) = \frac{d}{dx} \frac{\delta}{\delta q(x)} \int \big(\frac{1}{2}q(y)^3 + \frac{c}{2}q(y)q''(y)\big)dy.$

dimensione ∞: Teoria dei campi classica (in forma Hamiltoniana)

(Formulazione originaria:) un sistema di equazioni Hamiltoniane in 1 variablie indip x e ℓ variabili dipendenti $q_1(x), \dots, q_\ell(x) \in \mathcal{F} = Fun(U)$:

$$\frac{\partial q_i(x,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\ell} H_{ij}\left(\frac{d}{dx}\right) \frac{\delta h(q)}{\delta q_j(x)} \ \left(= H \frac{\delta h}{\delta q} \right).$$

- $h(q)$ è il funzionale Hamiltoniano, ovvero un *funzionale locale*

$$h(q) = \int h(q(x), q'(x), \dots, q^{(n)}(x))dx : \mathcal{F} \to \mathbb{R}.$$

  (spazio delle **Osservabili fisiche**)

- $\frac{\delta}{\delta q_i(x)}$ è la derivata variazionale:

$$\frac{\delta}{\delta q_i(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\partial}{\partial q_i^{(n)}(x)}.$$

- $H = \left(H_{i,j}(d/dx)\right)_{i,j=1}^{\ell}$ è l'Operatore Hamiltoniano, che soddisfa:
  - *antiautoaggiunto* $H^*(d/dx) = -H(d/dx)$,
  - *ulteriore condizione* $[H,H]_{SB}$.

Ex: eq KdV (1887) $\frac{dq}{dt} = 3q(x)q'(x) + cq'''(x) = \frac{d}{dx}\frac{\delta}{\delta q(x)} \int \left(\frac{1}{2}q(y)^3 + \frac{c}{2}q(y)q''(y)\right)dy.$

dimensione ∞: Teoria dei campi classica (in forma Hamiltoniana)

(Formulazione originaria:) un sistema di equazioni Hamiltoniane in 1 variablie indip x e ℓ variabili dipendenti $q_1(x), \dots, q_\ell(x) \in \mathcal{F} = Fun(U)$:

$$\frac{\partial q_i(x,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\ell} H_{ij}\Big(\frac{d}{dx}\Big)\frac{\delta h(q)}{\delta q_j(x)} \ \Big(= H\frac{\delta h}{\delta q}\Big) .$$

- $h(q)$ è il funzionale Hamiltoniano, ovvero un *funzionale locale*

$$h(q) = \int h(q(x), q'(x), \dots, q^{(n)}(x))dx : \mathcal{F} \to \mathbb{R} .$$

  (spazio delle **Osservabili fisiche**)

- $\frac{\delta}{\delta q_i(x)}$ è la derivata variazionale:

$$\frac{\delta}{\delta q_i(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(- \frac{d}{dx}\Big)^n \frac{\partial}{\partial q_i^{(n)}(x)} .$$

- $H = \big(H_{i,j}(d/dx)\big)_{i,j=1}^{\ell}$ è l'Operatore Hamiltoniano, che soddisfa:
  - *antiautoaggiunto* $H^*(d/dx) = -H(d/dx)$,
  - *ulteriore condizione* $[H,H]_{SB}$.

Ex: eq KdV (1887) $\frac{dq}{dt} = 3q(x)q'(x) + cq'''(x) = \frac{d}{dx}\frac{\delta}{\delta q(x)}\int\big(\frac{1}{2}q(y)^3 + \frac{c}{2}q(y)q''(y)\big)dy.$

dimensione ∞: Teoria dei campi classica (in forma Hamiltoniana)

(Formulazione originaria:) un sistema di equazioni Hamiltoniane in 1 variablie indip x e ℓ variabili dipendenti $q_1(x), \dots, q_\ell(x) \in \mathcal{F} = Fun(U)$:

$$\frac{\partial q_i(x,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\ell} H_{ij}\Big(\frac{d}{dx}\Big) \frac{\delta h(q)}{\delta q_j(x)} \ \Big(= H \frac{\delta h}{\delta q} \Big) .$$

- $h(q)$ è il funzionale Hamiltoniano, ovvero un *funzionale locale*

$$h(q) = \int h(q(x), q'(x), \dots, q^{(n)}(x)) dx : \mathcal{F} \to \mathbb{R} .$$

  (spazio delle **Osservabili fisiche**)

- $\frac{\delta}{\delta q_i(x)}$ è la derivata variazionale:

$$\frac{\delta}{\delta q_i(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{d}{dx}\Big)^n \frac{\partial}{\partial q_i^{(n)}(x)} .$$

- $H = \big(H_{i,j}(d/dx)\big)_{i,j=1}^{\ell}$ è l'Operatore Hamiltoniano, che soddisfa:
  - *antiautoaggiunto* $H^*(d/dx) = -H(d/dx)$,
  - *ulteriore condizione* $[H,H]_{SB}$.

Ex: eq KdV (1887) $\frac{dq}{dt} = 3q(x)q'(x) + cq'''(x) = \frac{d}{dx}\frac{\delta}{\delta q(x)} \int \big(\frac{1}{2}q(y)^3 + \frac{c}{2}q(y)q''(y)\big)dy.$

dimensione ∞: Teoria dei campi classica (in forma Hamiltoniana)

(Formulazione originaria:) un sistema di equazioni Hamiltoniane in 1 variablie indip x e ℓ variabili dipendenti $q_1(x), \dots, q_\ell(x) \in \mathcal{F} = Fun(U)$:

$$\frac{\partial q_i(x,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\ell} H_{ij}\Big(\frac{d}{dx}\Big)\frac{\delta h(q)}{\delta q_j(x)} \ \Big(= H\frac{\delta h}{\delta q}\Big) \,.$$

- $h(q)$ è il funzionale Hamiltoniano, ovvero un *funzionale locale*

$$h(q) = \textstyle\int h(q(x), q'(x), \dots, q^{(n)}(x))dx : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \,.$$

  (spazio delle **Osservabili fisiche**)

- $\frac{\delta}{\delta q_i(x)}$ è la derivata variazionale:

$$\frac{\delta}{\delta q_i(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{d}{dx}\Big)^n \frac{\partial}{\partial q_i^{(n)}(x)} \,.$$

- $H = \big(H_{i,j}(d/dx)\big)_{i,j=1}^{\ell}$ è l'Operatore Hamiltoniano, che soddisfa:
  - *antiautoaggiunto* $H^*(d/dx) = -H(d/dx)$,
  - *ulteriore condizione* $[H, H]_{SB}$.

<u>**Ex**</u>: eq KdV (1887) $\frac{dq}{dt} = 3q(x)q'(x) + cq'''(x) = \frac{d}{dx}\frac{\delta}{\delta q(x)}\int\big(\frac{1}{2}q(y)^3 + \frac{c}{2}q(y)q''(y)\big)dy$.

(Formulazione originaria:) un sistema di equazioni Hamiltoniane in 1 variablie indip x e ℓ variabili dipendenti $q_1(x),\dots,q_\ell(x)\in\mathcal{F}=Fun(U)$:

$$\frac{\partial q_i(x,t)}{\partial t}=\sum_{j=1}^{\ell}H_{ij}\Big(\frac{d}{dx}\Big)\frac{\delta h(q)}{\delta q_j(x)}\ \Big(=H\frac{\delta h}{\delta q}\Big).$$

- $h(q)$ è il funzionale Hamiltoniano, ovvero un *funzionale locale*

$$h(q)=\int h(q(x),q'(x),\dots,q^{(n)}(x))dx:\ \mathcal{F}\to\mathbb{R}.$$

  (spazio delle **Osservabili fisiche**)

- $\frac{\delta}{\delta q_i(x)}$ è la derivata variazionale:

$$\frac{\delta}{\delta q_i(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{d}{dx}\Big)^n\frac{\partial}{\partial q_i^{(n)}(x)}.$$

- $H=\big(H_{i,j}(d/dx)\big)_{i,j=1}^{\ell}$ è l'Operatore Hamiltoniano, che soddisfa:
  - *antiautoaggiunto* $H^*(d/dx)=-H(d/dx)$,
  - *ulteriore condizione* $[H,H]_{SB}$.

Ex: eq KdV (1887) $\frac{dq}{dt}=3q(x)q'(x)+cq'''(x)=\frac{d}{dx}\frac{\delta}{\delta q(x)}\int(\frac{1}{2}q(y)^3+\frac{c}{2}q(y)q''(y))dy.$

Domanda: vale l'analogo del *Teorema di Darboux*? (ovvero: esiste un unico operatore Hamiltoniano, a meno di cambio di coordinate ?)

Definizione: Trasformazione di contatto: è un cambio di variabili $x, (q_i(x))_{i=1}^{\ell} \mapsto y, (r_j(y))_{j=1}^{\ell}$ del tipo:

$$\begin{array}{l} x = \varphi(y, r_j(y), r_j'(y), \dots)\,, \\ q_i(x) = \psi_i(y, r_j(y), r_j'(y), \dots) \end{array} \left(\implies \frac{d}{dx} = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^{-1} \frac{d}{dy} \right)$$

che trasformare un operatore Hamiltoniano $H(x, q(x); d/dx)$ in un operatore Hamiltoniano $\tilde{H}(y, r(y); d/dy)$ dello *stesso ordine*

Caso scalare ($\ell = 1$) le trasformazioni di contatto sono:

$$\begin{array}{l} x = \varphi(y, r(y), r'(y))\,, \\ q(x) = \psi(y, r(y), r'(y)) \end{array} \,, \text{ t.c. } \frac{\partial \varphi}{\partial r'} \frac{d}{dy} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r'} \frac{d}{dy} \varphi\,.$$

Ex: *trasformata di Legendre*: $x = r'(y)\,, \quad q(x) = y r'(y) - r(y)$.

Domanda: vale l'analogo del *Teorema di Darboux*? (ovvero: esiste un unico operatore Hamiltoniano, a meno di cambio di coordinate ?)

Definizione: Trasformazione di contatto: è un cambio di variabili $x, (q_i(x))_{i=1}^{\ell} \mapsto y, (r_j(y))_{j=1}^{\ell}$ del tipo:

$$\begin{array}{l} x = \varphi(y, r_j(y), r_j'(y), \dots), \\ q_i(x) = \psi_i(y, r_j(y), r_j'(y), \dots) \end{array} \left(\implies \frac{d}{dx} = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^{-1} \frac{d}{dy} \right)$$

che trasformare un operatore Hamiltoniano $H(x, q(x); d/dx)$ in un operatore Hamiltoniano $\tilde{H}(y, r(y); d/dy)$ dello *stesso ordine*

Caso scalare ($\ell = 1$) le trasformazioni di contatto sono:

$$\begin{array}{l} x = \varphi(y, r(y), r'(y)), \\ q(x) = \psi(y, r(y), r'(y)) \end{array}, \quad \text{t.c. } \frac{\partial \varphi}{\partial r'} \frac{d}{dy} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r'} \frac{d}{dy} \varphi .$$

Ex: *trasformata di Legendre*: $x = r'(y)$, $q(x) = yr'(y) - r(y)$.

Domanda: vale l'analogo del *Teorema di Darboux*? (ovvero: esiste un unico operatore Hamiltoniano, a meno di cambio di coordinate ?)

Definizione: Trasformazione di contatto: è un cambio di variabili $x, (q_i(x))_{i=1}^{\ell} \mapsto y, (r_j(y))_{j=1}^{\ell}$ del tipo:

$$\begin{array}{l} x = \varphi(y, r_j(y), r_j'(y), \dots), \\ q_i(x) = \psi_i(y, r_j(y), r_j'(y), \dots) \end{array} \quad \Big(\implies \frac{d}{dx} = \Big(\frac{d\varphi}{dy}\Big)^{-1} \frac{d}{dy} \Big)$$

che trasformare un operatore Hamiltoniano $H(x, q(x); d/dx)$ in un operatore Hamiltoniano $\tilde{H}(y, r(y); d/dy)$ dello *stesso ordine*

Caso scalare ($\ell = 1$) le trasformazioni di contatto sono:

$$\begin{array}{l} x = \varphi(y, r(y), r'(y)), \\ q(x) = \psi(y, r(y), r'(y)) \end{array} , \quad \text{t.c. } \frac{\partial\varphi}{\partial r'} \frac{d}{dy}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r'} \frac{d}{dy}\varphi .$$

Ex: *trasformata di Legendre*: $x = r'(y)$, $q(x) = yr'(y) - r(y)$.

Domanda: vale l'analogo del *Teorema di Darboux*? (ovvero: esiste un unico operatore Hamiltoniano, a meno di cambio di coordinate ?)

Definizione: Trasformazione di contatto: è un cambio di variabili $x, (q_i(x))_{i=1}^{\ell} \mapsto y, (r_j(y))_{j=1}^{\ell}$ del tipo:

$$\begin{array}{l} x = \varphi(y, r_j(y), r_j'(y), \dots), \\ q_i(x) = \psi_i(y, r_j(y), r_j'(y), \dots) \end{array} \quad \left(\implies \frac{d}{dx} = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^{-1} \frac{d}{dy} \right)$$

che trasformare un operatore Hamiltoniano $H(x, q(x); d/dx)$ in un operatore Hamiltoniano $\tilde{H}(y, r(y); d/dy)$ dello *stesso ordine*

Caso scalare ($\ell = 1$) le trasformazioni di contatto sono:

$$\begin{array}{l} x = \varphi(y, r(y), r'(y)), \\ q(x) = \psi(y, r(y), r'(y)) \end{array} \quad , \quad \text{t.c. } \frac{\partial \varphi}{\partial r'} \frac{d}{dy} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r'} \frac{d}{dy} \varphi .$$

Ex: *trasformata di Legendre*: $x = r'(y)$, $q(x) = yr'(y) - r(y)$.

Domanda: vale l'analogo del *Teorema di Darboux*? (ovvero: esiste un unico operatore Hamiltoniano, a meno di cambio di coordinate ?)

Definizione: Trasformazione di contatto: è un cambio di variabili $x, (q_i(x))_{i=1}^{\ell} \mapsto y, (r_j(y))_{j=1}^{\ell}$ del tipo:

$$\begin{array}{l} x = \varphi(y, r_j(y), r_j'(y), \dots), \\ q_i(x) = \psi_i(y, r_j(y), r_j'(y), \dots) \end{array} \left(\implies \frac{d}{dx} = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^{-1} \frac{d}{dy} \right)$$

che trasformare un operatore Hamiltoniano $H(x, q(x); d/dx)$ in un operatore Hamiltoniano $\tilde{H}(y, r(y); d/dy)$ dello *stesso ordine*

Caso scalare ($\ell = 1$) le trasformazioni di contatto sono:

$$\begin{array}{l} x = \varphi(y, r(y), r'(y)), \\ q(x) = \psi(y, r(y), r'(y)) \end{array}, \quad \text{t.c. } \frac{\partial \varphi}{\partial r'} \frac{d}{dy} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r'} \frac{d}{dy} \varphi .$$

Ex: *trasformata di Legendre*: $x = r'(y)$, $q(x) = yr'(y) - r(y)$.

Risposta: NO

Già nel caso scalare $\ell = 1$ il problma è *non banale*:

- in dim $< \infty$: $H(q) = \{q, q\} = 0$ per antisimmetria;
- in dim ∞, $H(d/dx) = \sum_n f_n(q, q', \dots) \frac{d^n}{dx^n} = -H^*(d/dx)$ (t.c. $[H, H]_{SB} = 0$)

Domanda: vale l'analogo del *Teorema di Darboux*? (ovvero: esiste un unico operatore Hamiltoniano, a meno di cambio di coordinate ?)

Definizione: Trasformazione di contatto: è un cambio di variabili $x, (q_i(x))_{i=1}^{\ell} \mapsto y, (r_j(y))_{j=1}^{\ell}$ del tipo:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(y, r_j(y), r_j'(y), \dots), \\ q_i(x) &= \psi_i(y, r_j(y), r_j'(y), \dots) \end{aligned} \quad \left(\implies \frac{d}{dx} = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^{-1} \frac{d}{dy} \right)$$

che trasformare un operatore Hamiltoniano $H(x, q(x); d/dx)$ in un operatore Hamiltoniano $\tilde{H}(y, r(y); d/dy)$ dello *stesso ordine*

Caso scalare ($\ell = 1$) le trasformazioni di contatto sono:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(y, r(y), r'(y)), \\ q(x) &= \psi(y, r(y), r'(y)) \end{aligned} \quad , \quad \text{t.c. } \frac{\partial\varphi}{\partial r'} \frac{d}{dy} \psi = \frac{\partial\psi}{\partial r'} \frac{d}{dy} \varphi .$$

Ex: *trasformata di Legendre*: $x = r'(y)$, $q(x) = yr'(y) - r(y)$.

Risposta: NO

Già nel caso scalare $\ell = 1$ il problma è *non banale*:

- in dim $< \infty$: $H(q) = \{q, q\} = 0$ per antisimmetria;
- in dim ∞, $H(d/dx) = \sum_n f_n(q, q', \dots) \frac{d^n}{dx^n} = -H^*(d/dx)$ (t.c. $[H, H]_{SB} = 0$)

Problema(tutt'ora aperto): classificare (a meno di trasf. di contatto) gli *operatori Hamiltoniani scalari* (in 1 variabile $q(x)$)

Storia:

Problema(tutt'ora aperto): classificare (a meno di trasf. di contatto) gli *operatori Hamiltoniani scalari* (in 1 variabile $q(x)$)

Storia:

- ordine $N = 1$ [Vinogradov (1978), Gelfman-Dorfman (1979)]: $\exists!$ operatore Hamiltoniano (a meno di $\sim$): $H = \frac{d}{dx}$ (operatore *GFZ*).
- ordine $N = 3$ [Astashov ('83), Astashov-Vinogradov ('86), Mokhov ('87), Olver ('88)]: una famiglia di operatori Hamiltoniani:

$$H = \frac{d^3}{dx^3} + a\left(2q(x)\frac{d}{dx} + q'(x)\right), \quad a \in \mathbb{C}$$

 (operatore *Virasoro-Magri*, legato all'eq. KdV).
- ordine $N = 5$ [Cooke ('91)]: classificazione di operatori Hamiltoniani (a meno di $\sim$): operatori quasi-costanti, e ($b, c \in \mathbb{C}$)

$$H^{[5,b,c]}(d/dx) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\right) \circ \frac{1}{q}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q}\left(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\right) + b\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\right)$$

- [DSKW (2010)] ordine $N = 7, 9, 11, 13$ (e congettura per ogni N)

Problema(tutt'ora aperto): classificare (a meno di trasf. di contatto) gli *operatori Hamiltoniani scalari* (in 1 variabile $q(x)$)

Storia:

- ordine $N = 1$ [Vinogradov (1978), Gelfman-Dorfman (1979)]: $\exists!$ operatore Hamiltoniano (a meno di $\sim$): $H = \frac{d}{dx}$ (operatore *GFZ*).
- ordine $N = 3$ [Astashov ('83), Astashov-Vinogradov ('86), Mokhov ('87), Olver ('88)]: una famiglia di operatori Hamiltoniani:

$$H = \frac{d^3}{dx^3} + a\left(2q(x)\frac{d}{dx} + q'(x)\right), \ a \in \mathbb{C}$$

(operatore *Virasoro-Magri*, legato all'eq. KdV).
- ordine $N = 5$ [Cooke ('91)]: classificazione di operatori Hamiltoniani (a meno di $\sim$): operatori quasi-costanti, e ($b, c \in \mathbb{C}$)

$$H^{[5,b,c]}(d/dx) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\right) \circ \frac{1}{q}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q}\left(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\right) + b\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\right)$$

- [DSKW (2010)] ordine $N = 7, 9, 11, 13$ (e congettura per ogni N)

Problema(tutt'ora aperto): classificare (a meno di trasf. di contatto) gli *operatori Hamiltoniani scalari* (in 1 variabile $q(x)$)

Storia:

- ordine $N = 1$ [Vinogradov (1978), Gelfman-Dorfman (1979)]: $\exists !$ operatore Hamiltoniano (a meno di $\sim$): $H = \frac{d}{dx}$ (operatore *GFZ*).
- ordine $N = 3$ [Astashov ('83), Astashov-Vinogradov ('86), Mokhov ('87), Olver ('88)]: una famiglia di operatori Hamiltoniani:

$$H = \frac{d^3}{dx^3} + a\Big(2q(x)\frac{d}{dx} + q'(x)\Big)\,, \ \ a \in \mathbb{C}$$

  (operatore *Virasoro-Magri*, legato all'eq. KdV).
- ordine $N = 5$ [Cooke ('91)]: classificazione di operatori Hamiltoniani (a meno di $\sim$): operatori quasi-costanti, e ($b, c \in \mathbb{C}$)

$$H^{[5,b,c]}(d/dx) = \Big(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\Big) \circ \frac{1}{q}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q}\Big(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\Big) + b\frac{d}{dx}\Big(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\Big)$$

- [DSKW (2010)] ordine $N = 7, 9, 11, 13$ (e congettura per ogni N)

Problema(tutt'ora aperto): classificare (a meno di trasf. di contatto) gli *operatori Hamiltoniani scalari* (in 1 variabile $q(x)$)

Storia:

- ordine $N = 1$ [Vinogradov (1978), Gelfman-Dorfman (1979)]: $\exists!$ operatore Hamiltoniano (a meno di $\sim$): $H = \frac{d}{dx}$ (operatore *GFZ*).
- ordine $N = 3$ [Astashov ('83), Astashov-Vinogradov ('86), Mokhov ('87), Olver ('88)]: una famiglia di operatori Hamiltoniani:

$$H = \frac{d^3}{dx^3} + a\left(2q(x)\frac{d}{dx} + q'(x)\right), \quad a \in \mathbb{C}$$

  (operatore *Virasoro-Magri*, legato all'eq. KdV).
- ordine $N = 5$ [Cooke ('91)]: classificazione di operatori Hamiltoniani (a meno di $\sim$): operatori quasi-costanti, e ($b, c \in \mathbb{C}$)

$$H^{[5,b,c]}(d/dx) = (\frac{d^2}{dx^2} - c^2) \circ \frac{1}{q}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q}(\frac{d^2}{dx^2} - c^2) + b\frac{d}{dx}(\frac{d^2}{dx^2} - c^2)$$

- [DSKW (2010)] ordine $N = 7, 9, 11, 13$ (e congettura per ogni N)

Problema(tutt'ora aperto): classificare (a meno di trasf. di contatto) gli *operatori Hamiltoniani scalari* (in 1 variabile $q(x)$)

Storia:

- ordine $N = 1$ [Vinogradov (1978), Gelfman-Dorfman (1979)]: $\exists!$ operatore Hamiltoniano (a meno di $\sim$): $H = \frac{d}{dx}$ (operatore *GFZ*).
- ordine $N = 3$ [Astashov ('83), Astashov-Vinogradov ('86), Mokhov ('87), Olver ('88)]: una famiglia di operatori Hamiltoniani:

$$H = \frac{d^3}{dx^3} + a\Big(2q(x)\frac{d}{dx} + q'(x)\Big)\,,\ a \in \mathbb{C}$$

(operatore *Virasoro-Magri*, legato all'eq. KdV).
- ordine $N = 5$ [Cooke ('91)]: classificazione di operatori Hamiltoniani (a meno di $\sim$): operatori quasi-costanti, e ($b, c \in \mathbb{C}$)

$$H^{[5,b,c]}(d/dx) = \Big(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\Big) \circ \frac{1}{q}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q}\Big(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\Big) + b\frac{d}{dx}\Big(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\Big)$$

- [DSKW (2010)] ordine $N = 7, 9, 11, 13$ (e congettura per ogni N)

Algebre di Vertice di Poisson (PVA)

Definizione: una PVA $\mathcal{V}$ è un $\mathbb{C}[\partial]$-modulo dotato di: una struttura di algebra comm. assoc. differenziale (rispetto a ∂):

$$f, g \in \mathcal{V} \mapsto f \cdot g \ \left(\text{t.c. } \partial(fg) = f'g + fg' \right)$$

ed una struttura di algebra di Lie conforme, ovvero un λ-bracket $f, g \in \mathcal{V} \mapsto \{f_\lambda g\} \in \mathcal{V}[\lambda]$, t.c.

$$\begin{array}{ll} \text{(sesquilinearità)} & \{\partial f_\lambda g\} = -\lambda\{f_\lambda g\}\,, \quad \{f_\lambda \partial g\} = (\partial + \lambda)\{f_\lambda g\} \\ \text{(antisimmetria)} & \{g_\lambda f\} = -\{f_{-\lambda-\partial} g\} \\ \text{(id. Jacobi)} & \{f_\lambda\{g_\mu h\}\} - \{g_\mu\{f_\lambda h\}\} = \{\{f_\lambda g\}_{\lambda+\mu} h\} \end{array}$$

e tali strutture sono legate dalla regola di Leibniz:

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + \{f_\lambda h\}g$$

Algebre di Vertice di Poisson (PVA)

Definizione: una PVA $\mathcal{V}$ è un $\mathbb{C}[\partial]$-modulo dotato di: una struttura di algebra comm. assoc. differenziale (rispetto a ∂):

$$f, g \in \mathcal{V} \mapsto f \cdot g \, \left(\text{t.c. } \partial(fg) = f'g + fg' \right)$$

ed una struttura di algebra di Lie conforme, ovvero un λ-bracket $f, g \in \mathcal{V} \mapsto \{f_\lambda g\} \in \mathcal{V}[\lambda]$, t.c.

$$\begin{array}{ll} \text{(sesquilinearità)} & \{\partial f_\lambda g\} = -\lambda\{f_\lambda g\} \, , \quad \{f_\lambda \partial g\} = (\partial + \lambda)\{f_\lambda g\} \\ \text{(antisimmetria)} & \{g_\lambda f\} = -\{f_{-\lambda-\partial} g\} \\ \text{(id. Jacobi)} & \{f_\lambda \{g_\mu h\}\} - \{g_\mu \{f_\lambda h\}\} = \{\{f_\lambda g\}_{\lambda+\mu} h\} \end{array}$$

e tali strutture sono legate dalla regola di Leibniz:

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + \{f_\lambda h\}g$$

Definizione: una PVA $\mathcal{V}$ è un $\mathbb{C}[\partial]$-modulo dotato di: una struttura di algebra comm. assoc. differenziale (rispetto a ∂):

$$f, g \in \mathcal{V} \mapsto f \cdot g \ \Big(\text{t.c. } \partial(fg) = f'g + fg' \Big)$$

ed una struttura di algebra di Lie conforme, ovvero un λ-bracket $f, g \in \mathcal{V} \mapsto \{f_\lambda g\} \in \mathcal{V}[\lambda]$, t.c.

$$\begin{array}{ll} \text{(sesquilinearità)} & \{\partial f_\lambda g\} = -\lambda\{f_\lambda g\}\,, \quad \{f_\lambda \partial g\} = (\partial + \lambda)\{f_\lambda g\} \\ \text{(antisimmetria)} & \{g_\lambda f\} = -\{f_{-\lambda-\partial} g\} \\ \text{(id. Jacobi)} & \{f_\lambda\{g_\mu h\}\} - \{g_\mu\{f_\lambda h\}\} = \{\{f_\lambda g\}_{\lambda+\mu} h\} \end{array}$$

e tali strutture sono legate dalla regola di Leibniz:

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + \{f_\lambda h\}g$$

Definizione: una PVA $\mathcal{V}$ è un $\mathbb{C}[\partial]$-modulo dotato di: una struttura di algebra comm. assoc. differenziale (rispetto a ∂):

$$f, g \in \mathcal{V} \mapsto f \cdot g \ \left(\text{t.c. } \partial(fg) = f'g + fg' \right)$$

ed una struttura di algebra di Lie conforme, ovvero un λ-bracket $f, g \in \mathcal{V} \mapsto \{f_\lambda g\} \in \mathcal{V}[\lambda]$, t.c.

(sesquilinearità)	$\{\partial f_\lambda g\} = -\lambda\{f_\lambda g\}\ ,\quad \{f_\lambda \partial g\} = (\partial + \lambda)\{f_\lambda g\}$
(antisimmetria)	$\{g_\lambda f\} = -\{f_{-\lambda-\partial} g\}$
(id. Jacobi)	$\{f_\lambda\{g_\mu h\}\} - \{g_\mu\{f_\lambda h\}\} = \{\{f_\lambda g\}_{\lambda+\mu} h\}$

e tali strutture sono legate dalla regola di Leibniz:

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + \{f_\lambda h\}g$$

Definizione: una PVA $\mathcal{V}$ è un $\mathbb{C}[\partial]$-modulo dotato di: una struttura di algebra comm. assoc. differenziale (rispetto a ∂):

$$f, g \in \mathcal{V} \mapsto f \cdot g \ \left(\text{t.c. } \partial(fg) = f'g + fg' \right)$$

ed una struttura di algebra di Lie conforme, ovvero un λ-bracket $f, g \in \mathcal{V} \mapsto \{f_\lambda g\} \in \mathcal{V}[\lambda]$, t.c.

(sesquilinearità)	$\{\partial f_\lambda g\} = -\lambda\{f_\lambda g\}\ , \quad \{f_\lambda \partial g\} = (\partial + \lambda)\{f_\lambda g\}$
(antisimmetria)	$\{g_\lambda f\} = -\{f_{-\lambda-\partial} g\}$
(id. Jacobi)	$\{f_\lambda\{g_\mu h\}\} - \{g_\mu\{f_\lambda h\}\} = \{\{f_\lambda g\}_{\lambda+\mu} h\}$

e tali strutture sono legate dalla regola di Leibniz:

$$\{f_\lambda gh\} = \{f_\lambda g\}h + \{f_\lambda h\}g$$

Legame con la Teoria di Campo Classica (e operatori Hamiltoniani):

Recall: in Meccanica Classica: bracket di Poisson $\{\cdot\,,\,\cdot\}$ ⇔ operatore Hamiltoniano $H_{ij}(q)$:

$$(\Rightarrow) \quad H_{ij}(q) = \{q_j, q_i\} \qquad (\Leftarrow) \quad \{f, g\} = \nabla g \cdot H \nabla f$$

In Teoria di Campo Classica:

Definizione / Teorema [Barakat, DS, Kac (2009)]
Data un'algebra di funzioni differenziali $\mathcal{V}$ in x e $q_i(x)$, $i = 1, \dots, \ell$, un operatore Hamiltoniano $H = \left(H_{ij}(d/dx)\right)_{i,j=1}^{\ell}$ su $\mathcal{V}$ è equivalente a una strutura di PVA $\{\cdot\,_\lambda\,\cdot\}$ su $\mathcal{V}$:

$$(\Rightarrow) \quad H_{ij}(d/dx) = \{q_j\,{}_{\frac{d}{dx}}\,q_i\}$$

$$(\Leftarrow) \quad \{f, g\} = \sum_{i,j,m,n} \frac{\partial g}{\partial q_j^{(n)}} \left(\lambda + \frac{d}{dx}\right)^n H_{ji}\left(\lambda + \frac{d}{dx}\right)\left(-\lambda - \frac{d}{dx}\right)^m \frac{\partial f}{\partial q_i^{(m)}}$$

Conclusione: Classificare gli operatori Hamiltoniani scalari è equivalente a classificare le PVA con un generatore.
Nota: nel linguaggio delle PVA il problema resta complicato, ma si semplifica: bisogna classificare i polinomi $H(\lambda) = \{q\,{}_\lambda\,q\} \in \mathcal{V}[\lambda]$ tali

Legame con la Teoria di Campo Classica (e operatori Hamiltoniani):

Recall: in Meccanica Classica: bracket di Poisson $\{\cdot\,,\,\cdot\}$ $\Leftrightarrow$ operatore Hamiltoniano $H_{ij}(q)$:

$$(\Rightarrow)\quad H_{ij}(q) = \{q_j, q_i\} \qquad (\Leftarrow)\quad \{f,g\} = \nabla g \cdot H \nabla f$$

In Teoria di Campo Classica:

Definizione / Teorema [Barakat, DS, Kac (2009)]
Data un'algebra di funzioni differenziali $\mathcal{V}$ in x e $q_i(x)$, $i = 1,\dots,\ell$, un operatore Hamiltoniano $H = \left(H_{ij}(d/dx)\right)_{i,j=1}^{\ell}$ su $\mathcal{V}$ è equivalente a una strutura di PVA $\{\cdot\,_\lambda\,\cdot\}$ su $\mathcal{V}$:

$$(\Rightarrow)\quad H_{ij}(d/dx) = \{q_j\,{}_{\frac{d}{dx}}\,q_i\}$$

$$(\Leftarrow)\quad \{f,g\} = \sum_{i,j,m,n} \frac{\partial g}{\partial q_j^{(n)}} \Big(\lambda + \frac{d}{dx}\Big)^n H_{ji}\Big(\lambda + \frac{d}{dx}\Big) \Big(-\lambda - \frac{d}{dx}\Big)^m \frac{\partial f}{\partial q_i^{(m)}}$$

Conclusione: Classificare gli operatori Hamiltoniani scalari è equivalente a classificare le PVA con un generatore.
Nota: nel linguaggio delle PVA il problema resta complicato, ma si semplifica: bisogna classificare i polinomi $H(\lambda) = \{q_\lambda q\} \in \mathcal{V}[\lambda]$ tali

Legame con la Teoria di Campo Classica (e operatori Hamiltoniani):

Recall: in Meccanica Classica: bracket di Poisson $\{\cdot\,,\,\cdot\}\Leftrightarrow$ operatore Hamiltoniano $H_{ij}(q)$:

$$(\Rightarrow)\quad H_{ij}(q)=\{q_j,q_i\}\qquad(\Leftarrow)\quad \{f,g\}=\nabla g\cdot H\nabla f$$

In Teoria di Campo Classica:

Definizione / Teorema [Barakat, DS, Kac (2009)]
Data un'algebra di funzioni differenziali $\mathcal{V}$ in x e $q_i(x)$, $i=1,\dots,\ell$, un operatore Hamiltoniano $H=\big(H_{ij}(d/dx)\big)_{i,j=1}^{\ell}$ su $\mathcal{V}$ è equivalente a una strutura di PVA $\{\cdot\,_\lambda\,\cdot\}$ su $\mathcal{V}$:

$$(\Rightarrow)\quad H_{ij}(d/dx)=\{q_j\,{}_{\frac{d}{dx}}\,q_i\}$$

$$(\Leftarrow)\quad \{f,g\}=\sum_{i,j,m,n}\frac{\partial g}{\partial q_j^{(n)}}\Big(\lambda+\frac{d}{dx}\Big)^n H_{ji}\Big(\lambda+\frac{d}{dx}\Big)\Big(-\lambda-\frac{d}{dx}\Big)^m\frac{\partial f}{\partial q_i^{(m)}}$$

Conclusione: Classificare gli operatori Hamiltoniani scalari è equivalente a classificare le PVA con un generatore.
Nota: nel linguaggio delle PVA il problema resta complicato, ma si semplifica: bisogna classificare i polinomi $H(\lambda)=\{q_\lambda q\}\in\mathcal{V}[\lambda]$ tali

Legame con la Teoria di Campo Classica (e operatori Hamiltoniani):

In Teoria di Campo Classica:

Definizione / Teorema [Barakat, DS, Kac (2009)]
Data un'algebra di funzioni differenziali $\mathcal{V}$ in x e $q_i(x)$, $i = 1, \dots, \ell$, un operatore Hamiltoniano $H = \big(H_{ij}(d/dx)\big)_{i,j=1}^{\ell}$ su $\mathcal{V}$ è equivalente a una strutura di PVA $\{\cdot\,_\lambda\,\cdot\}$ su $\mathcal{V}$:

$$(\Rightarrow) \quad H_{ij}(d/dx) = \{q_j\,{}_{\frac{d}{dx}}\,q_i\}$$

$$(\Leftarrow) \quad \{f, g\} = \sum_{i,j,m,n} \frac{\partial g}{\partial q_j^{(n)}} \Big(\lambda + \frac{d}{dx}\Big)^n H_{ji}\Big(\lambda + \frac{d}{dx}\Big)\Big(-\lambda - \frac{d}{dx}\Big)^m \frac{\partial f}{\partial q_i^{(m)}}$$

Conclusione: Classificare gli operatori Hamiltoniani scalari è equivalente a classificare le PVA con un generatore.
Nota: nel linguaggio delle PVA il problema resta complicato, ma si semplifica: bisogna classificare i polinomi $H(\lambda) = \{q_\lambda q\} \in \mathcal{V}[\lambda]$ tali che: $\{q_\lambda q\} = -\{q_{-\lambda-\partial} q\}$ e $\{q_\lambda \{q_\mu q\}\} - \{q_\mu \{q_\lambda q\}\} = \{\{q_\lambda q\}_{\lambda+\mu} q\}$.

Legame con la Teoria di Campo Classica (e operatori Hamiltoniani):

In Teoria di Campo Classica:

Definizione / Teorema [Barakat, DS, Kac (2009)]
Data un'algebra di funzioni differenziali $\mathcal{V}$ in x e $q_i(x)$, $i = 1, \dots, \ell$, un operatore Hamiltoniano $H = \left(H_{ij}(d/dx)\right)_{i,j=1}^{\ell}$ su $\mathcal{V}$ è equivalente a una strutura di PVA $\{\cdot\,_\lambda\,\cdot\}$ su $\mathcal{V}$:

$$(\Rightarrow) \quad H_{ij}(d/dx) = \{q_j\,{}_{\frac{d}{dx}}\,q_i\}$$

$$(\Leftarrow) \quad \{f, g\} = \sum_{i,j,m,n} \frac{\partial g}{\partial q_j^{(n)}} \left(\lambda + \frac{d}{dx}\right)^n H_{ji}(\lambda + \frac{d}{dx}) \left(-\lambda - \frac{d}{dx}\right)^m \frac{\partial f}{\partial q_i^{(m)}}$$

Conclusione: Classificare gli operatori Hamiltoniani scalari è equivalente a classificare le PVA con un generatore.

Nota: nel linguaggio delle PVA il problema resta complicato, ma si semplifica: bisogna classificare i polinomi $H(\lambda) = \{q_\lambda q\} \in \mathcal{V}[\lambda]$ tali che: $\{q_\lambda q\} = -\{q_{-\lambda-\partial} q\}$ e $\{q_\lambda\{q_\mu q\}\} - \{q_\mu\{q_\lambda q\}\} = \{\{q_\lambda q\}_{\lambda+\mu} q\}$.

Legame con la Teoria di Campo Classica (e operatori Hamiltoniani):

In Teoria di Campo Classica:

Definizione / Teorema [Barakat, DS, Kac (2009)]
Data un'algebra di funzioni differenziali $\mathcal{V}$ in x e $q_i(x)$, $i = 1, \dots, \ell$, un operatore Hamiltoniano $H = \big(H_{ij}(d/dx)\big)_{i,j=1}^{\ell}$ su $\mathcal{V}$ è equivalente a una strutura di PVA $\{\cdot\,_\lambda\,\cdot\}$ su $\mathcal{V}$:

$$(\Rightarrow) \quad H_{ij}(d/dx) = \{q_j\,{}_{\frac{d}{dx}}\,q_i\}$$

$$(\Leftarrow) \quad \{f, g\} = \sum_{i,j,m,n} \frac{\partial g}{\partial q_j^{(n)}} \Big(\lambda + \frac{d}{dx}\Big)^n H_{ji}\big(\lambda + \frac{d}{dx}\big)\Big(-\lambda - \frac{d}{dx}\Big)^m \frac{\partial f}{\partial q_i^{(m)}}$$

Conclusione: Classificare gli operatori Hamiltoniani scalari è equivalente a classificare le PVA con un generatore.
Nota: nel linguaggio delle PVA il problema resta complicato, ma si semplifica: bisogna classificare i polinomi $H(\lambda) = \{q_\lambda q\} \in \mathcal{V}[\lambda]$ tali che: $\{q_\lambda q\} = -\{q_{-\lambda-\partial} q\}$ e $\{q_\lambda\{q_\mu q\}\} - \{q_\mu\{q_\lambda q\}\} = \{\{q_\lambda q\}_{\lambda+\mu} q\}$.

Alcuni risultati di classificazione

ottenuti con una combinazione di dimostrazioni teoriche e calcoli intensivi al computer

Alcuni risultati di classificazione

Teorema 1: $\forall N = 2n+5 \geq 5$ e $c(x)$ quasi-costante t.c. $c''(x) = 0$, esiste una famiglia di operatori Hamiltoniani di ordine N:

$$H^{[N,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) = B^{[n,c(x)]*}\left(\frac{d}{dx}\right) \circ \frac{d}{dx} \circ B^{[n,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right)$$

dove

$$B^{[n,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} - c(x)\right) \circ \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} - 2c(x)\right) \circ \cdots$$
$$\cdots \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} - nc(x)\right) \circ \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\frac{d}{dx} - c'(x)\right)$$

Teorema 2: (ordine $N = 7$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 7$ (a meno di $\sim$) è data da operatori antiautoaggiunti a coefficienti quasicostanti, di ordine 7, ed inoltre la seguente famiglia di operatori ($b \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ quasicostante t.c. $c'''(x) = 0$):

$$H_{(7,c(x),b)}\left(\frac{d}{dx}\right) = B_{(3,c(x))}{}^{*}\left(\frac{d}{dx}\right) \circ \frac{d}{dx} \circ B_{(3,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) + b\frac{d^3}{dx^3}$$

dove

$$B_{(3,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}c'(x)$$

Nota: per $c''(x) = 0$, vale la relazione $H^{[7,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) = H_{(7,-c^2(x),0)}\left(\frac{d}{dx}\right)$.

Teorema 1: $\forall N = 2n+5 \geq 5$ e $c(x)$ quasi-costante t.c. $c''(x) = 0$, esiste una famiglia di operatori Hamiltoniani di ordine N:

$$H^{[N,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) = B^{[n,c(x)]\,*}\left(\frac{d}{dx}\right) \circ \frac{d}{dx} \circ B^{[n,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right)$$

dove

$$B^{[n,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} - c(x)\right) \circ \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} - 2c(x)\right) \circ \cdots$$
$$\cdots \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} - nc(x)\right) \circ \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\frac{d}{dx} - c'(x)\right)$$

Teorema 2: (ordine $N = 7$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 7$ (a meno di $\sim$) è data da operatori antiautoaggiunti a coefficienti quasicostanti, di ordine 7, ed inoltre la seguente famiglia di operatori ($b \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ quasicostante t.c. $c'''(x) = 0$):

$$H_{(7,c(x),b)}\left(\frac{d}{dx}\right) = B_{(3,c(x))}{}^{*}\left(\frac{d}{dx}\right) \circ \frac{d}{dx} \circ B_{(3,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) + b\frac{d^3}{dx^3}$$

dove

$$B_{(3,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}c'(x)$$

Nota: per $c''(x) = 0$, vale la relazione $H^{[7,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) = H_{(7,-c^2(x),0)}\left(\frac{d}{dx}\right)$.

Teorema 1: $\forall N = 2n+5 \geq 5$ e $c(x)$ quasi-costante t.c. $c''(x) = 0$, esiste una famiglia di operatori Hamiltoniani di ordine N:

$$H^{[N,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) = B^{[n,c(x)]*}\left(\frac{d}{dx}\right) \circ \frac{d}{dx} \circ B^{[n,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right)$$

dove

$$B^{[n,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} - c(x)\right) \circ \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} - 2c(x)\right) \circ \cdots$$
$$\cdots\left(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} - nc(x)\right) \circ \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\frac{d}{dx} - c'(x)\right)$$

Teorema 2: (ordine $N = 7$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 7$ (a meno di $\sim$) è data da operatori antiautoaggiunti a coefficienti quasicostanti, di ordine 7, ed inoltre la seguente famiglia di operatori ($b \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ quasicostante t.c. $c'''(x) = 0$):

$$H_{(7,c(x),b)}\left(\frac{d}{dx}\right) = B_{(3,c(x))}{}^{*}\left(\frac{d}{dx}\right) \circ \frac{d}{dx} \circ B_{(3,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) + b\frac{d^3}{dx^3}$$

dove

$$B_{(3,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}c'(x)$$

Nota: per $c''(x) = 0$, vale la relazione $H^{[7,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) = H_{(7,-c^2(x),0)}\left(\frac{d}{dx}\right)$

Alcuni risultati di classificazione

Teorema 1: $\forall N = 2n+5 \geq 5$ e $c(x)$ quasi-costante t.c. $c''(x) = 0$, esiste una famiglia di operatori Hamiltoniani di ordine N:

$$H^{[N,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) = B^{[n,c(x)]*}\left(\frac{d}{dx}\right) \circ \frac{d}{dx} \circ B^{[n,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right)$$

dove

$$B^{[n,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} - c(x)\right) \circ \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} - 2c(x)\right) \circ \cdots$$
$$\cdots \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} - nc(x)\right) \circ \left(\frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\frac{d}{dx} - c'(x)\right)$$

Teorema 2: (ordine $N = 7$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 7$ (a meno di $\sim$) è data da operatori antiautoaggiunti a coefficienti quasicostanti, di ordine 7, ed inoltre la seguente famiglia di operatori ($b \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ quasicostante t.c. $c'''(x) = 0$):

$$H_{(7,c(x),b)}\left(\frac{d}{dx}\right) = B_{(3,c(x))}{}^{*}\left(\frac{d}{dx}\right) \circ \frac{d}{dx} \circ B_{(3,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) + b\frac{d^3}{dx^3}$$

dove

$$B_{(3,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}c'(x)$$

Nota: per $c''(x) = 0$, vale la relazione $H^{[7,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) = H_{(7,-c^2(x),0)}\left(\frac{d}{dx}\right)$.

Teorema 3: (ordine $N = 9$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 9$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori antiautoaggiunti quasicostanti di ordine 9,
- comb. lin. di operatori $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 9$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[9,c(x)]}(\frac{d}{dx}) + a\frac{d^3}{dx^3}$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$,
- la famiglia di operatori ($a, b \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ qcost t.c. $c''(x) = 0$):

$$H_{(9,c(x),a,b)}\Big(\frac{d}{dx}\Big) = B_{(3,c(x))}{}^*\Big(\frac{d}{dx}\Big) \circ \Big(\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}c'(x)\Big) \circ B_{(3,c(x))}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + a^2\Big(\frac{d^2}{dx^2} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}c(x)\frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{4}c'(x)\frac{d^2}{dx^2}\Big) + b^3\frac{d^3}{dx^3}$$

Nota: per $c'(x) = 0$, vale la relazione

$$H_{(9,c(x),a,b)}\Big(\frac{d}{dx}\Big) = H_{[9,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + 3cH_{[7,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + (3c^2 + a^2)H_{[5,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + (c^3 + a^2c + b^3)\frac{d^3}{dx^3}$$

Teorema 3: (ordine $N = 9$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 9$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori antiautoaggiunti quasicostanti di ordine 9,
- comb. lin. di operatori $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 9$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[9,c(x)]}(\frac{d}{dx}) + a\frac{d^3}{dx^3}$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$,
- la famiglia di operatori ($a, b \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ qcost t.c. $c''(x) = 0$):

$$H_{(9,c(x),a,b)}\Big(\frac{d}{dx}\Big) = {B_{(3,c(x))}}^*\Big(\frac{d}{dx}\Big) \circ \Big(\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}c'(x)\Big) \circ B_{(3,c(x))}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + a^2\Big(\frac{d^2}{dx^2} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}c(x)\frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{4}c'(x)\frac{d^2}{dx^2}\Big) + b^3\frac{d^3}{dx^3}$$

Nota: per $c'(x) = 0$, vale la relazione

$$H_{(9,c(x),a,b)}\Big(\frac{d}{dx}\Big) = H_{[9,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + 3cH_{[7,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + (3c^2 + a^2)H_{[5,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + (c^3 + a^2c + b^3)\frac{d^3}{dx^3}$$

Teorema 3: (ordine $N = 9$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 9$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori antiautoaggiunti quasicostanti di ordine 9,
- comb. lin. di operatori $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 9$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[9,c(x)]}(\frac{d}{dx}) + a\frac{d^3}{dx^3}$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$,
- la famiglia di operatori ($a, b \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ qcost t.c. $c''(x) = 0$):

$$H_{(9,c(x),a,b)}\Big(\frac{d}{dx}\Big) = B_{(3,c(x))}{}^*\Big(\frac{d}{dx}\Big) \circ \Big(\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}c'(x)\Big) \circ B_{(3,c(x))}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + a^2\Big(\frac{d^2}{dx^2} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}c(x)\frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{4}c'(x)\frac{d^2}{dx^2}\Big) + b^3\frac{d^3}{dx^3}$$

Nota: per $c'(x) = 0$, vale la relazione

$$H_{(9,c(x),a,b)}\Big(\frac{d}{dx}\Big) = H_{[9,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + 3cH_{[7,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + (3c^2 + a^2)H_{[5,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + (c^3 + a^2c + b^3)\frac{d^3}{dx^3}$$

Teorema 3: (ordine $N = 9$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 9$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori antiautoaggiunti quasicostanti di ordine 9,
- comb. lin. di operatori $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 9$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[9,c(x)]}(\frac{d}{dx}) + a\frac{d^3}{dx^3}$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$,
- la famiglia di operatori ($a, b \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ qcost t.c. $c''(x) = 0$):

$$H_{(9,c(x),a,b)}\Big(\frac{d}{dx}\Big) = B_{(3,c(x))}{}^*\Big(\frac{d}{dx}\Big) \circ \Big(\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}c'(x)\Big) \circ B_{(3,c(x))}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + a^2\Big(\frac{d^2}{dx^2} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}c(x)\frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{4}c'(x)\frac{d^2}{dx^2}\Big) + b^3\frac{d^3}{dx^3}$$

Nota: per $c'(x) = 0$, vale la relazione

$$H_{(9,c(x),a,b)}\Big(\frac{d}{dx}\Big) = H_{[9,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + 3cH_{[7,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + (3c^2 + a^2)H_{[5,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + (c^3 + a^2c + b^3)\frac{d^3}{dx^3}$$

Teorema 3: (ordine $N=9$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N=9$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori antiautoaggiunti quasicostanti di ordine 9,
- comb. lin. di operatori $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 9$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[9,c(x)]}(\frac{d}{dx}) + a\frac{d^3}{dx^3}$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x)=0$,
- la famiglia di operatori ($a, b \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ qcost t.c. $c''(x)=0$):

$$H_{(9,c(x),a,b)}\big(\frac{d}{dx}\big) = {B_{(3,c(x))}}^*\big(\frac{d}{dx}\big) \circ \Big(\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d}{dx}$$
$$+\frac{1}{2}c'(x)\Big) \circ B_{(3,c(x))}\big(\frac{d}{dx}\big) + a^2\Big(\frac{d^2}{dx^2} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2}$$
$$+\frac{1}{2}c(x)\frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{4}c'(x)\frac{d^2}{dx^2}\Big) + b^3\frac{d^3}{dx^3}$$

Nota: per $c'(x)=0$, vale la relazione

$$H_{(9,c(x),a,b)}\big(\frac{d}{dx}\big) = H_{[9,0]}\big(\frac{d}{dx}\big) + 3cH_{[7,0]}\big(\frac{d}{dx}\big) + (3c^2+a^2)H_{[5,0]}\big(\frac{d}{dx}\big)$$
$$+(c^3+a^2c+b^3)\frac{d^3}{dx^3}$$

Teorema 3: (ordine $N = 9$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 9$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori antiautoaggiunti quasicostanti di ordine 9,
- comb. lin. di operatori $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 9$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[9,c(x)]}(\frac{d}{dx}) + a\frac{d^3}{dx^3}$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$,
- la famiglia di operatori ($a, b \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ qcost t.c. $c''(x) = 0$):

$$H_{(9,c(x),a,b)}\Big(\frac{d}{dx}\Big) = B_{(3,c(x))}{}^*\Big(\frac{d}{dx}\Big) \circ \Big(\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} + c(x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}c'(x)\Big) \circ B_{(3,c(x))}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + a^2\Big(\frac{d^2}{dx^2} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}c(x)\frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{4}c'(x)\frac{d^2}{dx^2}\Big) + b^3\frac{d^3}{dx^3}$$

Nota: per $c'(x) = 0$, vale la relazione

$$H_{(9,c(x),a,b)}\Big(\frac{d}{dx}\Big) = H_{[9,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + 3cH_{[7,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + (3c^2 + a^2)H_{[5,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + (c^3 + a^2c + b^3)\frac{d^3}{dx^3}$$

Teorema 4: (ordine $N = 11$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 11$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori a antiautoaggiunti coefficienti quasicostanti di ordine 11,
- comb. lin. di $H^{[N,0]}\left(\frac{d}{dx}\right)$, $N \leq 11$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[11,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) + aH_{(11,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right)$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$, dove

$$
\begin{aligned}
H_{(11,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) = {} & \frac{1}{q(x)^4}\frac{d^7}{dx^7} - 14\frac{q'(x)}{q(x)^5}\frac{d^6}{dx^6} + \frac{1}{3q(x)^6}\Big(-10c(x)^2q(x)^4 - 8c'(x)q(x)^3 \\
& -60q(x)q''(x) + 285q'(x)^2\Big)\frac{d^5}{dx^5} + \frac{5}{3q(x)^7}\Big(10c(x)^2q(x)^4q'(x) - 10c(x)c'(x)q(x)^5 \\
& +12c'(x)q(x)^3q'(x) - 9q(x)^2q'''(x) + 120q(x)q'(x)q''(x) - 225q'(x)^3\Big)\frac{d^4}{dx^4} \\
& +\frac{1}{3q(x)^8}\Big(7c(x)^4q(x)^8 + 40c(x)^2q(x)^5q''(x) - 120c(x)^2q(x)^4q'(x)^2 + 174c(x)c'(x)q(x)^5q'(x) \\
& -40c'(x)^2q(x)^6 + 48c'(x)q(x)^4q''(x) - 192c'(x)q(x)^3q'(x)^2 - 18q(x)^3q(x)^{(4)} \\
& +300q(x)^2q'(x)q'''(x) + 210q(x)^2q''(x)^2 - 2340q(x)q'(x)^2q''(x) + 2520q'(x)^4 - \frac{4}{3}aq(x)^8\Big)\frac{d^3}{dx^3} \\
& +\frac{1}{3q(x)^9}\Big(42c(x)^3c'(x)q(x)^9 + 10c(x)^2q(x)^6q'''(x) - 90c(x)^2q(x)^5q'(x)q''(x) + 120c(x)^2q(x)^4q'(x) \\
& +81c(x)c'(x)q(x)^6q''(x) - 243c(x)c'(x)q(x)^5q'(x)^2 + 81c'(x)^2q(x)^6q'(x) + 12c'(x)q(x)^5q'''(x) \\
& -144c'(x)q(x)^4q'(x)q''(x) + 240c'(x)q(x)^3q'(x)^3 - 3q(x)^4q(x)^{(5)} + 60q(x)^3q'(x)q(x)^{(4)} \\
& +105q(x)^3q''(x)q'''(x) - 585q(x)^2q'(x)^2q'''(x) - 810q(x)^2q'(x)q''(x)^2 + 3465q(x)q'(x)^3q''(x) \\
& -2520q'(x)^5\Big)\frac{d^2}{dx^2} + \frac{7}{3q(x)^5}c(x)c'(x)\Big(3c(x)c'(x)q(x)^5 + q(x)^2q'''(x) - 9q(x)q'(x)q''(x) + 12q'(x)^3\Big)\frac{d}{dx} \\
& +\frac{7}{3q(x)^5}c'(x)^2\Big(-3c(x)c'(x)q(x)^5 - q(x)^2q'''(x) + 9q(x)q'(x)q''(x) - 12q'(x)^3\Big)
\end{aligned}
$$

Teorema 4: (ordine $N = 11$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 11$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori a antiautoaggiunti coefficienti quasicostanti di ordine 11,
- comb. lin. di $H^{[N,0]}\left(\frac{d}{dx}\right)$, $N \leq 11$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[11,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) + aH_{(11,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right)$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$, dove

$$
\begin{aligned}
H_{(11,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) &= \frac{1}{q(x)^4}\frac{d^7}{dx^7} - 14\frac{q'(x)}{q(x)^5}\frac{d^6}{dx^6} + \frac{1}{3q(x)^6}\Big(-10c(x)^2q(x)^4 - 8c'(x)q(x)^3 \\
&-60q(x)q''(x) + 285q'(x)^2\Big)\frac{d^5}{dx^5} + \frac{5}{3q(x)^7}\Big(10c(x)^2q(x)^4q'(x) - 10c(x)c'(x)q(x)^5 \\
&+12c'(x)q(x)^3q'(x) - 9q(x)^2q'''(x) + 120q(x)q'(x)q''(x) - 225q'(x)^3\Big)\frac{d^4}{dx^4} \\
&+\frac{1}{3q(x)^8}\Big(7c(x)^4q(x)^8 + 40c(x)^2q(x)^5q''(x) - 120c(x)^2q(x)^4q'(x)^2 + 174c(x)c'(x)q(x)^5q'(x) \\
&-40c'(x)^2q(x)^6 + 48c'(x)q(x)^4q''(x) - 192c'(x)q(x)^3q'(x)^2 - 18q(x)^3q(x)^{(4)} \\
&+300q(x)^2q'(x)q'''(x) + 210q(x)^2q''(x)^2 - 2340q(x)q'(x)^2q''(x) + 2520q'(x)^4 - \frac{4}{3}aq(x)^8\Big)\frac{d^3}{dx^3} \\
&+\frac{1}{3q(x)^9}\Big(42c(x)^3c'(x)q(x)^9 + 10c(x)^2q(x)^6q'''(x) - 90c(x)^2q(x)^5q'(x)q''(x) + 120c(x)^2q(x)^4q'(x) \\
&+81c(x)c'(x)q(x)^6q''(x) - 243c(x)c'(x)q(x)^5q'(x)^2 + 81c'(x)^2q(x)^6q'(x) + 12c'(x)q(x)^5q'''(x) \\
&-144c'(x)q(x)^4q'(x)q''(x) + 240c'(x)q(x)^3q'(x)^3 - 3q(x)^4q(x)^{(5)} + 60q(x)^3q'(x)q(x)^{(4)} \\
&+105q(x)^3q''(x)q'''(x) - 585q(x)^2q'(x)^2q'''(x) - 810q(x)^2q'(x)q''(x)^2 + 3465q(x)q'(x)^3q''(x) \\
&-2520q'(x)^5\Big)\frac{d^2}{dx^2} + \frac{7}{3q(x)^5}c(x)c'(x)\Big(3c(x)c'(x)q(x)^5 + q(x)^2q'''(x) - 9q(x)q'(x)q''(x) + 12q'(x)^3\Big)\frac{d}{dx} \\
&+\frac{7}{3q(x)^5}c'(x)^2\Big(-3c(x)c'(x)q(x)^5 - q(x)^2q'''(x) + 9q(x)q'(x)q''(x) - 12q'(x)^3\Big)
\end{aligned}
$$

Teorema 4: (ordine $N = 11$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 11$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori a antiautoaggiunti coefficienti quasicostanti di ordine 11,
- comb. lin. di $H^{[N,0]}\left(\frac{d}{dx}\right)$, $N \leq 11$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[11,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) + aH_{(11,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right)$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$, dove

$$\begin{aligned}
H_{(11,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) &= \frac{1}{q(x)^4}\frac{d^7}{dx^7} - 14\frac{q'(x)}{q(x)^5}\frac{d^6}{dx^6} + \frac{1}{3q(x)^6}\Big(-10c(x)^2q(x)^4 - 8c'(x)q(x)^3 \\
&-60q(x)q''(x) + 285q'(x)^2\Big)\frac{d^5}{dx^5} + \frac{5}{3q(x)^7}\Big(10c(x)^2q(x)^4q'(x) - 10c(x)c'(x)q(x)^5 \\
&+12c'(x)q(x)^3q'(x) - 9q(x)^2q'''(x) + 120q(x)q'(x)q''(x) - 225q'(x)^3\Big)\frac{d^4}{dx^4} \\
&+\frac{1}{3q(x)^8}\Big(7c(x)^4q(x)^8 + 40c(x)^2q(x)^5q''(x) - 120c(x)^2q(x)^4q'(x)^2 + 174c(x)c'(x)q(x)^5q'(x) \\
&-40c'(x)^2q(x)^6 + 48c'(x)q(x)^4q''(x) - 192c'(x)q(x)^3q'(x)^2 - 18q(x)^3q(x)^{(4)} \\
&+300q(x)^2q'(x)q'''(x) + 210q(x)^2q''(x)^2 - 2340q(x)q'(x)^2q''(x) + 2520q'(x)^4 - \frac{4}{3}aq(x)^8\Big)\frac{d^3}{dx^3} \\
&+\frac{1}{3q(x)^9}\Big(42c(x)^3c'(x)q(x)^9 + 10c(x)^2q(x)^6q'''(x) - 90c(x)^2q(x)^5q'(x)q''(x) + 120c(x)^2q(x)^4q'(x) \\
&+81c(x)c'(x)q(x)^6q''(x) - 243c(x)c'(x)q(x)^5q'(x)^2 + 81c'(x)^2q(x)^6q'(x) + 12c'(x)q(x)^5q'''(x) \\
&-144c'(x)q(x)^4q'(x)q''(x) + 240c'(x)q(x)^3q'(x)^3 - 3q(x)^4q(x)^{(5)} + 60q(x)^3q'(x)q(x)^{(4)} \\
&+105q(x)^3q''(x)q'''(x) - 585q(x)^2q'(x)^2q'''(x) - 810q(x)^2q'(x)q''(x)^2 + 3465q(x)q'(x)^3q''(x) \\
&-2520q'(x)^5\Big)\frac{d^2}{dx^2} + \frac{7}{3q(x)^5}c(x)c'(x)\Big(3c(x)c'(x)q(x)^5 + q(x)^2q'''(x) - 9q(x)q'(x)q''(x) + 12q'(x)^3\Big)\frac{d}{dx} \\
&+\frac{7}{3q(x)^5}c'(x)^2\Big(-3c(x)c'(x)q(x)^5 - q(x)^2q'''(x) + 9q(x)q'(x)q''(x) - 12q'(x)^3\Big)
\end{aligned}$$

Teorema 4: (ordine $N = 11$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 11$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori a antiautoaggiunti coefficienti quasicostanti di ordine 11,
- comb. lin. di $H^{[N,0]}\left(\frac{d}{dx}\right)$, $N \leq 11$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[11,c(x)]}\left(\frac{d}{dx}\right) + aH_{(11,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right)$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$, dove

$$
\begin{aligned}
H_{(11,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) &= \frac{1}{q(x)^4}\frac{d^7}{dx^7} - 14\frac{q'(x)}{q(x)^5}\frac{d^6}{dx^6} + \frac{1}{3q(x)^6}\Big(-10c(x)^2q(x)^4 - 8c'(x)q(x)^3 \\
&-60q(x)q''(x) + 285q'(x)^2\Big)\frac{d^5}{dx^5} + \frac{5}{3q(x)^7}\Big(10c(x)^2q(x)^4q'(x) - 10c(x)c'(x)q(x)^5 \\
&+12c'(x)q(x)^3q'(x) - 9q(x)^2q'''(x) + 120q(x)q'(x)q''(x) - 225q'(x)^3\Big)\frac{d^4}{dx^4} \\
&+\frac{1}{3q(x)^8}\Big(7c(x)^4q(x)^8 + 40c(x)^2q(x)^5q''(x) - 120c(x)^2q(x)^4q'(x)^2 + 174c(x)c'(x)q(x)^5q'(x) \\
&-40c'(x)^2q(x)^6 + 48c'(x)q(x)^4q''(x) - 192c'(x)q(x)^3q'(x)^2 - 18q(x)^3q(x)^{(4)} \\
&+300q(x)^2q'(x)q'''(x) + 210q(x)^2q''(x)^2 - 2340q(x)q'(x)^2q''(x) + 2520q'(x)^4 - \frac{4}{3}aq(x)^8\Big)\frac{d^3}{dx^3} \\
&+\frac{1}{3q(x)^9}\Big(42c(x)^3c'(x)q(x)^9 + 10c(x)^2q(x)^6q'''(x) - 90c(x)^2q(x)^5q'(x)q''(x) + 120c(x)^2q(x)^4q'(x) \\
&+81c(x)c'(x)q(x)^6q''(x) - 243c(x)c'(x)q(x)^5q'(x)^2 + 81c'(x)^2q(x)^6q'(x) + 12c'(x)q(x)^5q'''(x) \\
&-144c'(x)q(x)^4q'(x)q''(x) + 240c'(x)q(x)^3q'(x)^3 - 3q(x)^4q(x)^{(5)} + 60q(x)^3q'(x)q(x)^{(4)} \\
&+105q(x)^3q''(x)q'''(x) - 585q(x)^2q'(x)^2q'''(x) - 810q(x)^2q'(x)q''(x)^2 + 3465q(x)q'(x)^3q''(x) \\
&-2520q'(x)^5\Big)\frac{d^2}{dx^2} + \frac{7}{3q(x)^5}c(x)c'(x)\Big(3c(x)c'(x)q(x)^5 + q(x)^2q'''(x) - 9q(x)q'(x)q''(x) + 12q'(x)^3\Big)\frac{d}{dx} \\
&+\frac{7}{3q(x)^5}c'(x)^2\Big(-3c(x)c'(x)q(x)^5 - q(x)^2q'''(x) + 9q(x)q'(x)q''(x) - 12q'(x)^3\Big)
\end{aligned}
$$

Teorema 4: (ordine $N=11$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N=11$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori a antiautoaggiunti coefficienti quasicostanti di ordine 11,
- comb. lin. di $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 11$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[11,c(x)]}(\frac{d}{dx}) + aH_{(11,c(x))}(\frac{d}{dx})$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x)=0$, dove $H_{(11,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) = \cdots$
- i seguenti operatori ($a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ quasicostante t.c. $c''(x)=0$):

$$\tilde{H}_{(11,c(x),a)}(\frac{d}{dx}) = B^*_{(5,c(x))}(\frac{d}{dx}) \circ \frac{d}{dx} \circ B_{(5,c(x))}(\frac{d}{dx}) \\ +a\Big(H^{[5,0]}(\frac{d}{dx}) + c(x)\frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{2}\frac{d^2}{dx^2}\Big)$$

dove

$$B_{(5,c(x))}(\frac{d}{dx}) = \Big(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} + \frac{1}{4}c(x)\Big) \circ \Big(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}c'(x)\Big)$$

- un'ulteriore famiglia di oper. ($a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost. t.c. $c''(x)=0$):

$$\tilde{\tilde{H}}_{(11,c(x),a)}\Big(\frac{d}{dx}\Big) = ***$$

Nota: per $c'(x)=0$, $H_{(11,c(x))}$, $\tilde{H}_{(11,c(x))}$ e $\tilde{\tilde{H}}_{(11,c(x))}$ sono comb.lin. di $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$

Teorema 4: (ordine $N = 11$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 11$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori a antiautoaggiunti coefficienti quasicostanti di ordine 11,
- comb. lin. di $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 11$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[11,c(x)]}(\frac{d}{dx}) + aH_{(11,c(x))}(\frac{d}{dx})$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$, dove $H_{(11,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) = \cdots$
- i seguenti operatori ($a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ quasicostante t.c. $c''(x) = 0$):

$$\tilde{H}_{(11,c(x),a)}(\frac{d}{dx}) = B^*_{(5,c(x))}(\frac{d}{dx}) \circ \frac{d}{dx} \circ B_{(5,c(x))}(\frac{d}{dx}) \\ +a\Big(H^{[5,0]}(\frac{d}{dx}) + c(x)\frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{2}\frac{d^2}{dx^2}\Big)$$

dove

$$B_{(5,c(x))}(\frac{d}{dx}) = \Big(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} + \frac{1}{4}c(x)\Big) \circ \Big(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}c'(x)\Big)$$

- un'ulteriore famiglia di oper. ($a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost. t.c. $c''(x) = 0$):

$$\tilde{\tilde{H}}_{(11,c(x),a)}\left(\frac{d}{dx}\right) = ***$$

Nota: per $c'(x) = 0$, $H_{(11,c(x))}$, $\tilde{H}_{(11,c(x))}$ e $\tilde{\tilde{H}}_{(11,c(x))}$ sono comb.lin. di $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$

Teorema 4: (ordine $N = 11$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 11$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori a antiautoaggiunti coefficienti quasicostanti di ordine 11,
- comb. lin. di $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 11$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[11,c(x)]}(\frac{d}{dx}) + aH_{(11,c(x))}(\frac{d}{dx})$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$, dove $H_{(11,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) = \cdots$
- i seguenti operatori ($a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ quasicostante t.c. $c''(x) = 0$):

$$\tilde{H}_{(11,c(x),a)}\left(\frac{d}{dx}\right) = B^*_{(5,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) \circ \frac{d}{dx} \circ B_{(5,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right)$$
$$+a\Big(H^{[5,0]}\left(\frac{d}{dx}\right) + c(x)\frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{2}\frac{d^2}{dx^2}\Big)$$

dove

$$B_{(5,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) = \Big(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} + \frac{1}{4}c(x)\Big) \circ \Big(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}c'(x)\Big)$$

- un'ulteriore famiglia di oper. ($a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost. t.c. $c''(x) = 0$):

$$\tilde{\tilde{H}}_{(11,c(x),a)}\left(\frac{d}{dx}\right) = ***$$

Nota: per $c'(x) = 0$, $H_{(11,c(x))}$, $\tilde{H}_{(11,c(x))}$ e $\tilde{\tilde{H}}_{(11,c(x))}$ sono comb.lin. di $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$

Teorema 4: (ordine $N = 11$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 11$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori a antiautoaggiunti coefficienti quasicostanti di ordine 11,
- comb. lin. di $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 11$ dispari, a coeffic. costanti
- $H^{[11,c(x)]}(\frac{d}{dx}) + aH_{(11,c(x))}(\frac{d}{dx})$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$, dove $\quad H_{(11,c(x))}\left(\frac{d}{dx}\right) = \cdots$
- i seguenti operatori ($a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ quasicostante t.c. $c''(x) = 0$):

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{(11,c(x),a)}\Big(\frac{d}{dx}\Big) = B^*_{(5,c(x))}\Big(\frac{d}{dx}\Big) \circ \frac{d}{dx} \circ B_{(5,c(x))}\Big(\frac{d}{dx}\Big) \\ +a\Big(H^{[5,0]}\Big(\frac{d}{dx}\Big) + c(x)\frac{d^3}{dx^3} + \frac{3}{2}\frac{d^2}{dx^2}\Big)\end{aligned}$$

  dove

$$B_{(5,c(x))}\Big(\frac{d}{dx}\Big) = \Big(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} + \frac{1}{4}c(x)\Big) \circ \Big(\frac{1}{q(x)}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q(x)}\frac{d^2}{dx^2} + c(x)\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}c'(x)\Big)$$

- un'ulteriore famiglia di oper. ($a \in \mathbb{C}$ e $c(x)$ q-cost. t.c. $c''(x) = 0$):

$$\tilde{\tilde{H}}_{(11,c(x),a)}\left(\frac{d}{dx}\right) = ***$$

Nota: per $c'(x) = 0$, $H_{(11,c(x))}$, $\tilde{H}_{(11,c(x))}$ e $\tilde{\tilde{H}}_{(11,c(x))}$ sono comb.lin. di $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$

Teorema 4: (ordine $N = 13$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 13$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori antiautoaggiunti a coefficienti quasicostanti di ordine 13,
- comb. lin. di $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 13$ dispari, a coeffic. costanti
- la famiglia di operatori $H^{[13,c(x)]}(\frac{d}{dx})$ con $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$.

Teorema 4: (ordine $N = 13$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 13$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori antiautoaggiunti a coefficienti quasicostanti di ordine 13,
- comb. lin. di $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 13$ dispari, a coeffic. costanti
- la famiglia di operatori $H^{[13,c(x)]}(\frac{d}{dx})$ con $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$.

Teorema 4: (ordine $N = 13$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 13$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori antiautoaggiunti a coefficienti quasicostanti di ordine 13,
- comb. lin. di $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 13$ dispari, a coeffic. costanti
- la famiglia di operatori $H^{[13,c(x)]}(\frac{d}{dx})$ con $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$.

Teorema 4: (ordine $N = 13$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 13$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori antiautoaggiunti a coefficienti quasicostanti di ordine 13,
- comb. lin. di $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 13$ dispari, a coeffic. costanti
- la famiglia di operatori $H^{[13,c(x)]}(\frac{d}{dx})$ con $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$.

Teorema 4: (ordine $N = 13$) una classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N = 13$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori antiautoaggiunti a coefficienti quasicostanti di ordine 13,
- comb. lin. di $H^{[N,0]}(\frac{d}{dx})$, $N \leq 13$ dispari, a coeffic. costanti
- la famiglia di operatori $H^{[13,c(x)]}(\frac{d}{dx})$ con $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$.

Congettura: la classificazione degli operatori Hamiltoniani scalari di ordine $N \geq 13$ (a meno di $\sim$) è data da:

- operatori antiautoaggiunti a coefficienti quasicostanti di ordine N,
- comb. lin. di $H^{[n,0]}(\frac{d}{dx})$, $n \leq N$ dispari, a coeffic. costanti
- la famiglia di operatori $H^{[N,c(x)]}(\frac{d}{dx})$ con $c(x)$ q-cost t.c. $c''(x) = 0$.

Definizione: Un algebra di vertice di Poisson $\mathcal{V}$ di tipo CFT con ℓ generatori $L, q_2, \dots, q_\ell$, è t.c.

- L è un campo di Virasoro: $\{L_\lambda L\} = (\partial + 2\lambda)L$
- q_i è un campo primario di peso conforme $\Delta_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$: $\{L_\lambda q_i\} = (\partial + \Delta_i)q_i$.

Esempi: algebre W classiche $W^{cl}(\mathfrak{g}, f)$, ottenute tramite riduzione Hamiltoniana [Drinfeld-Sokolov (1984)]; per f nilpotente pari:

$$W^{cl}(\mathfrak{g}, f) = \Big(S(\mathbb{C}[\partial] \otimes \mathfrak{g}) / \langle n - (f, n) \,\big|\, n \in \mathfrak{n}_+ \rangle\Big)^{ad_\lambda(\mathfrak{n}_+)}$$

dove $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ è la decomposizione triangolare rispetto ad una tripla sl_2 $(e, f, h) \subset \mathfrak{g}$, ed ad_λ è la struttura di algebra di Lie conforme $Cur(\mathfrak{g})$.

Nota: $W^{cl}(\mathfrak{g}, f)$ è una PVA di tipo CFT, con ℓ pari a $\dim \mathfrak{g}^f$.

Congettura **(Teorema per $\ell = 2$):** gli operatori Hamiltoniani di tipo CFT sono, a meno di trasformazioni di contatto, sono esattamente gli operatori Hamiltoniani associati alle algebre W classiche.

Definizione: Un algebra di vertice di Poisson $\mathcal{V}$ di tipo CFT con ℓ generatori $L, q_2, \dots, q_\ell$, è t.c.

- L è un campo di Virasoro: $\{L_\lambda L\} = (\partial + 2\lambda)L$
- q_i è un campo primario di peso conforme $\Delta_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$: $\{L_\lambda q_i\} = (\partial + \Delta_i)q_i$.

Esempi: algebre W classiche $W^{cl}(\mathfrak{g}, f)$, ottenute tramite riduzione Hamiltoniana [Drinfeld-Sokolov (1984)]; per f nilpotente pari:

$$W^{cl}(\mathfrak{g}, f) = \Big(S(\mathbb{C}[\partial] \otimes \mathfrak{g}) / \langle n - (f, n) \,\big|\, n \in \mathfrak{n}_+ \rangle \Big)^{ad_\lambda(\mathfrak{n}_+)}$$

dove $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ è la decomposizione triangolare rispetto ad una tripla sl_2 $(e, f, h) \subset \mathfrak{g}$, ed ad_λ è la struttura di algebra di Lie conforme $Cur(\mathfrak{g})$.

Nota: $W^{cl}(\mathfrak{g}, f)$ è una PVA di tipo CFT, con ℓ pari a $\dim \mathfrak{g}^f$.

Congettura **(Teorema per $\ell = 2$):** gli operatori Hamiltoniani di tipo CFT sono, a meno di trasformazioni di contatto, sono esattamente gli operatori Hamiltoniani associati alle algebre W classiche.

Definizione: Un algebra di vertice di Poisson $\mathcal{V}$ di tipo CFT con ℓ generatori $L, q_2, \ldots, q_\ell$, è t.c.

- L è un campo di Virasoro: $\{L_\lambda L\} = (\partial + 2\lambda)L$
- q_i è un campo primario di peso conforme $\Delta_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$: $\{L_\lambda q_i\} = (\partial + \Delta_i)q_i$.

Esempi: algebre *W* classiche $W^{cl}(\mathfrak{g}, f)$, ottenute tramite riduzione Hamiltoniana [Drinfeld-Sokolov (1984)]; per f nilpotente pari:

$$W^{cl}(\mathfrak{g}, f) = \Big(S(\mathbb{C}[\partial] \otimes \mathfrak{g}) / \big\langle n - (f, n) \,\big|\, n \in \mathfrak{n}_+ \big\rangle \Big)^{ad_\lambda(\mathfrak{n}_+)}$$

dove $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ è la decomposizione triangolare rispetto ad una tripla sl_2 $(e, f, h) \subset \mathfrak{g}$, ed ad_λ è la struttura di algebra di Lie conforme $Cur(\mathfrak{g})$.

Nota: $W^{cl}(\mathfrak{g}, f)$ è una PVA di tipo CFT, con ℓ pari a $\dim \mathfrak{g}^f$.

Congettura **(Teorema per $\ell = 2$):** gli operatori Hamiltoniani di tipo CFT sono, a meno di trasformazioni di contatto, sono esattamente gli operatori Hamiltoniani associati alle algebre *W* classiche.

Sistemi (bi)Hamiltoniani Integrabili

A) Equazioni Hamiltoniane integrabili in Meccanica Classica

Data un'equazione Hamiltoniana $\dot{q} = H(q) \cdot \nabla h(q)$, un integrale del moto è una funzione $f(q) \in \mathcal{F} = C^\infty(M)$ (un *osservabile*) costante rispetto all'evoluzione temporale:

$$\frac{df(q)}{dt} = \{h(q), f(q)\}_H = 0$$

(ovvero, $f \in \mathcal{F}^h$.) Per il Teorema di Liouville, se ho un numero sufficiente ($m \geq n/2$) di integrali del moto, in involuzione:

$$h = f_0, f_1, \ldots, f_m \,, \quad \text{t.c. } \{f_i, f_j\}_H = 0$$

allora l'equazione Hamiltoniana è completamente integrabile (si definiscono le variabili azione-angolo e si scrivono le soluzioni per quadrature).

A) Equazioni Hamiltoniane integrabili in Meccanica Classica

Data un'equazione Hamiltoniana $\dot{q} = H(q) \cdot \nabla h(q)$, un integrale del moto è una funzione $f(q) \in \mathcal{F} = C^\infty(M)$ (un *osservabile*) costante rispetto all'evoluzione temporale:

$$\frac{df(q)}{dt} = \{h(q), f(q)\}_H = 0$$

(ovvero, $f \in \mathcal{F}^h$.) Per il Teorema di Liouville, se ho un numero sufficiente ($m \geq n/2$) di integrali del moto, in involuzione:

$$h = f_0, f_1, \dots, f_m \;, \quad \text{t.c. } \{f_i, f_j\}_H = 0$$

allora l'equazione Hamiltoniana è completamente integrabile (si definiscono le variabili azione-angolo e si scrivono le soluzioni per quadrature).

A) Equazioni Hamiltoniane integrabili in Meccanica Classica

Data un'equazione Hamiltoniana $\dot{q} = H(q) \cdot \nabla h(q)$, un integrale del moto è una funzione $f(q) \in \mathcal{F} = C^\infty(M)$ (un *osservabile*) costante rispetto all'evoluzione temporale:

$$\frac{df(q)}{dt} = \{h(q), f(q)\}_H = 0$$

(ovvero, $f \in \mathcal{F}^h$.) Per il Teorema di Liouville, se ho un numero sufficiente ($m \geq n/2$) di integrali del moto, in involuzione:

$$h = f_0, f_1, \ldots, f_m \,, \quad \text{t.c. } \{f_i, f_j\}_H = 0$$

allora l'equazione Hamiltoniana è completamente integrabile (si definiscono le variabili azione-angolo e si scrivono le soluzioni per quadrature).

A) Equazioni Hamiltoniane integrabili in Meccanica Classica

Data un'equazione Hamiltoniana $\dot{q} = H(q) \cdot \nabla h(q)$, un integrale del moto è una funzione $f(q) \in \mathcal{F} = C^\infty(M)$ (un *osservabile*) costante rispetto all'evoluzione temporale:

$$\frac{df(q)}{dt} = \{h(q), f(q)\}_H = 0$$

(ovvero, $f \in \mathcal{F}^h$.) Per il Teorema di Liouville, se ho un numero sufficiente ($m \geq n/2$) di integrali del moto, in involuzione:

$$h = f_0, f_1, \dots, f_m \ , \quad \text{t.c. } \{f_i, f_j\}_H = 0$$

allora l'equazione Hamiltoniana è completamente integrabile (si definiscono le variabili azione-angolo e si scrivono le soluzioni per quadrature).

B) Equazioni Hamiltoniane integrabili in Teoria dei Campi Classica

Consideriamo un equazione Hamiltoniana in $q_1(x), \dots, q_\ell(x) \in \mathcal{M}$:

$$\frac{d}{dt} q_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\ell} H_{ij}(d/dx) \frac{\delta}{\delta q_j(x)} \int h(q, q', \dots) dy$$

Un integrale del moto è un funzionale locale $\int f(q, q', \dots) dx$ in $\mathcal{V} = C^\infty(\mathcal{M})$ (un *osservabile*) costante rispetto all'evoluzione:

$$\frac{d}{dt} \int f(q, q', \dots) dx = \int \{h_\lambda f\}_H \big|_{\lambda=0} dx = 0$$

L'ipotesi minima che possiamo fare per l'integrabilità è che esista una successione infinita di integrali del moto (lin. indip.) in involuzione:

$$h = f_0, f_1, f_2, \dots \ , \quad \text{t.c. } \{f_i, f_j\}_H = 0 \ \forall i, j \in \mathbb{Z}_+$$

B) Equazioni Hamiltoniane integrabili in Teoria dei Campi Classica

Consideriamo un equazione Hamiltoniana in $q_1(x), \dots, q_\ell(x) \in \mathcal{M}$:

$$\frac{d}{dt} q_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\ell} H_{ij}(d/dx) \frac{\delta}{\delta q_j(x)} \int h(q, q', \dots) dy$$

Un integrale del moto è un funzionale locale $\int f(q, q', \dots) dx$ in $\mathcal{V} = C^\infty(\mathcal{M})$ (un *osservabile*) costante rispetto all'evoluzione:

$$\frac{d}{dt} \int f(q, q', \dots) dx = \int \{h_\lambda f\}_H \big|_{\lambda=0} dx = 0$$

L'ipotesi minima che possiamo fare per l'integrabilità è che esista una successione infinita di integrali del moto (lin. indip.) in involuzione:

$$h = f_0, f_1, f_2, \dots \ , \quad \text{t.c. } \{f_i, f_j\}_H = 0 \ \forall i, j \in \mathbb{Z}_+$$

B) Equazioni Hamiltoniane integrabili in Teoria dei Campi Classica

Consideriamo un equazione Hamiltoniana in $q_1(x), \dots, q_\ell(x) \in \mathcal{M}$:

$$\frac{d}{dt} q_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\ell} H_{ij}(d/dx) \frac{\delta}{\delta q_j(x)} \int h(q, q', \dots) dy$$

Un integrale del moto è un funzionale locale $\int f(q, q', \dots) dx$ in $\mathcal{V} = C^\infty(\mathcal{M})$ (un *osservabile*) costante rispetto all'evoluzione:

$$\frac{d}{dt} \int f(q, q', \dots) dx = \int \{h_\lambda f\}_H \big|_{\lambda=0} dx = 0$$

L'ipotesi minima che possiamo fare per l'integrabilità è che esista una successione infinita di integrali del moto (lin. indip.) in involuzione:

$$h = f_0, f_1, f_2, \dots \ , \quad \text{t.c. } \{f_i, f_j\}_H = 0 \ \forall i, j \in \mathbb{Z}_+$$

B) Equazioni Hamiltoniane integrabili in Teoria dei Campi Classica

Consideriamo un equazione Hamiltoniana in $q_1(x), \dots, q_\ell(x) \in \mathcal{M}$:

$$\frac{d}{dt} q_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\ell} H_{ij}(d/dx) \frac{\delta}{\delta q_j(x)} \int h(q, q', \dots) dy$$

Un integrale del moto è un funzionale locale $\int f(q, q', \dots) dx$ in $\mathcal{V} = C^\infty(\mathcal{M})$ (un *osservabile*) costante rispetto all'evoluzione:

$$\frac{d}{dt} \int f(q, q', \dots) dx = \int \{h_\lambda f\}_H \big|_{\lambda=0} dx = 0$$

L'ipotesi minima che possiamo fare per l'integrabilità è che esista una successione infinita di integrali del moto (lin. indip.) in involuzione:

$$h = f_0, f_1, f_2, \dots \;, \quad \text{t.c. } \{f_i, f_j\}_H = 0 \;\forall i, j \in \mathbb{Z}_+$$

B) Equazioni Hamiltoniane integrabili in Teoria dei Campi Classica

Consideriamo un equazione Hamiltoniana in $q_1(x), \ldots, q_\ell(x) \in \mathcal{M}$:

$$\frac{d}{dt} q_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\ell} H_{ij}(d/dx) \frac{\delta}{\delta q_j(x)} \int h(q, q', \ldots) dy$$

Un integrale del moto è un funzionale locale $\int f(q, q', \ldots)dx$ in $\mathcal{V} = C^\infty(\mathcal{M})$ (un *osservabile*) costante rispetto all'evoluzione:

$$\frac{d}{dt} \int f(q, q', \ldots)dx = \int \{h_\lambda f\}_H \big|_{\lambda=0} dx = 0$$

L'ipotesi minima che possiamo fare per l'integrabilità è che esista una successione infinita di integrali del moto (lin. indip.) in involuzione:

$$h = f_0, f_1, f_2, \ldots \ , \quad \text{t.c. } \{f_i, f_j\}_H = 0 \ \forall i, j \in \mathbb{Z}_+$$

(**Nota:** Questo *non* corrisponde alla *completa integrabilità* di Liouville; una generalizzazione dell'ipotesi nel caso finito dimensionale, è: *span*$\{\frac{\delta f_n}{\delta q}\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \subset \Omega^1$ è un sottospazio isotropico massimale rispetto all'accoppiamento $\Omega^1 \times \Omega^1 \to \mathcal{V}/\partial\mathcal{V}$ definito dall'operatore Hamiltoniano H)

Schema di integrabilità di Lenard-Magri

Un equazione di evoluzione è bi-Hamiltoniana se esistono due operatori Hamiltoniani $H(d/dx)$ e $K(d/dx)$ compatibili (i.e. $\alpha H(d/dx) + \beta K(d/dx)$ è Hamiltoniano per $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) t.c. l'evoluzione si scrive in due forme Hamiltoniane diverse:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} q_i(x,t) &= H(d/dx) \frac{\delta}{\delta q(x)} \int h_0(q, q', \dots) dy \\
&= K(d/dx) \frac{\delta}{\delta q(x)} \int h_1(q, q', \dots) dy
\end{aligned}
$$

In tal caso, sotto ulteriori condizioni si riesce a construire una collezione infinita di integrali del moto $\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots$ in involuzione, definiti dalla formula ricorsiva:

$$
H\left(\frac{d}{dx}\right) \frac{\delta}{\delta q(x)} \int h_n(q, q', \dots) dy = K\left(\frac{d}{dx}\right) \frac{\delta}{\delta q(x)} \int h_{n+1}(q, q', \dots) dy
$$

Schema di integrabilità di Lenard-Magri

Un equazione di evoluzione è bi-Hamiltoniana se esistono due operatori Hamiltoniani $H(d/dx)$ e $K(d/dx)$ compatibili (i.e. $\alpha H(d/dx) + \beta K(d/dx)$ è Hamiltoniano per $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) t.c. l'evoluzione si scrive in due forme Hamiltoniane diverse:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_i(x,t) &= H(d/dx) \frac{\delta}{\delta q(x)} \int h_0(q, q', \dots) dy \\ &= K(d/dx) \frac{\delta}{\delta q(x)} \int h_1(q, q', \dots) dy \end{aligned}$$

In tal caso, sotto ulteriori condizioni si riesce a construire una collezione infinita di integrali del moto $\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots$ in involuzione, definiti dalla formula ricorsiva:

$$H(\frac{d}{dx}) \frac{\delta}{\delta q(x)} \int h_n(q, q', \dots) dy = K(\frac{d}{dx}) \frac{\delta}{\delta q(x)} \int h_{n+1}(q, q', \dots) dy$$

Schema di integrabilità di Lenard-Magri

Un equazione di evoluzione è bi-Hamiltoniana se esistono due operatori Hamiltoniani $H(d/dx)$ e $K(d/dx)$ compatibili (i.e. $\alpha H(d/dx) + \beta K(d/dx)$ è Hamiltoniano per $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) t.c. l'evoluzione si scrive in due forme Hamiltoniane diverse:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_i(x,t) &= H(d/dx) \frac{\delta}{\delta q(x)} \int h_0(q, q', \dots) dy \\ &= K(d/dx) \frac{\delta}{\delta q(x)} \int h_1(q, q', \dots) dy \end{aligned}$$

In tal caso, sotto ulteriori condizioni si riesce a construire una collezione infinita di integrali del moto $\int h_0, \int h_1, \int h_2, \dots$ in involuzione, definiti dalla formula ricorsiva:

$$H\left(\frac{d}{dx}\right) \frac{\delta}{\delta q(x)} \int h_n(q, q', \dots) dy = K\left(\frac{d}{dx}\right) \frac{\delta}{\delta q(x)} \int h_{n+1}(q, q', \dots) dy$$

Esempi (nel caso scalare, $\ell = 1$):

1. eq KdV: $\frac{dq}{dt} = 3qq' + cq'''$, biHamiltoniana integrabile con:
$$H = q' + 2q\frac{d}{dx} + c\frac{d^3}{dx^3} \quad \text{e} \quad K = \frac{d}{dx}$$
2. eq lineare: $\frac{dq}{dt} = q'$, biHamiltoniana integrabile con:
$$H = \frac{d^3}{dx^3} \quad \text{e} \quad K = \frac{d^3}{dx^3}$$
3. eq Harry Dym: $\frac{dq}{dt} = (1/\sqrt{q})'''$, biHamiltoniana integrabile con:
$$H = \frac{d}{dx} + c\frac{d^3}{dx^3} \quad \text{e} \quad K = q' + 2q\frac{d}{dx}$$
4. eq MSS (1991): $\frac{dq}{dt} = \left(\frac{q''}{q^3} - 3\frac{q'^2}{q^4} - \frac{c^2}{2q^2}\right)'$ $(c \in \mathbb{C})$, biHamiltoniana:
$$H = \left(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\right) \circ \frac{1}{q}\frac{d}{dx} \circ \frac{1}{q}\left(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\right) \quad \text{e} \quad K = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2} - c^2\right)$$

Progetto: (lavoro in corso)

- trovare nuove / classificare coppie di operatori Hamiltoniani compatibili H, K
- per tali coppie H, K, vedere se si applica lo sche di Lenard-Magri, i nmodo da trovare nuove / classificare equazioni biHamiltoniane integrabili.

Teorema: La coppia $H = H_{(7,c(x))}$, $K = \frac{d^3}{dx^3}$ dà i sistemi integrabili:

$$\frac{dq}{dt} = \Big(\frac{q''}{q^3} - 3\frac{q'^2}{q^4} - \frac{(c(x)^2)''}{4c''(x)}\Big)' \quad \text{se } c'' \neq 0 \ \text{[MSS]}$$

$$\frac{dq}{dt} = \Big(\frac{q''}{q^3} - 3\frac{q'^2}{q^4} - \frac{(c(x)^2)''}{4c''(x)}\Big)' \quad \text{se } c'' = 0, c' \neq 0 \ \text{[MSS]}$$

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} = {} & \Big(\frac{q^{(4)}}{q^5} - 15\frac{q'q'''}{q^6} - 10\frac{q''^2}{q^6} + 105\frac{q''q'^2}{q^7} - 105\frac{q'^4}{q^8} + (2c(x) - \frac{1}{4}c''(x)x^2 + \frac{1}{2}c'(x)x)\frac{q''}{q^3} \\ & -(\frac{3}{2}c'(x)x + 6c(x) - \frac{3}{4}c''(x)x^2)\frac{q'^2}{q^4} + 5c'(x)\frac{q'}{q^3} - \frac{5}{4}\frac{c''(x)}{q^2} - \frac{15}{16}c(x)^2 + \frac{9}{16}c(x)c''(x)x^2 \\ & -\frac{9}{8}c(x)c'(x)x + \frac{3}{64}c''(x)^2x^4 - \frac{3}{16}c'(x)c''(x)x^3 + \frac{3}{16}c'(x)^2x^2\Big)' \quad \text{(nuovo)}\end{aligned}$$

Teorema: La coppia $H = H^{[9,c(x)]}$, $K = \frac{d^3}{dx^3}$ dà il sistema integrabile:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} = {} & \Big(\frac{q^{(4)}}{q^5} - 15\frac{q'q'''}{q^6} - 10\frac{q''^2}{q^6} + 105\frac{q''q'^2}{q^7} - 105\frac{q'^4}{q^8} + 20c'(x)\frac{q'^2}{q^5} - 5c'(x)\frac{q''}{q^4} + 5c'(x)^2\frac{1}{q^2} \\ & -20c(x)c'(x)\frac{q'}{q^3} + 15c(x)^2\frac{q'^2}{q^4} - 5c(x)^2\frac{q''}{q^3} - 5c(x)^4\Big)' \quad \text{(nuovo)}\end{aligned}$$

Teorema: La coppia $H = H_{(7,c(x))}$, $K = \frac{d^3}{dx^3}$ dà i sistemi integrabili:

$$\frac{dq}{dt} = \Big(\frac{q''}{q^3} - 3\frac{q'^2}{q^4} - \frac{(c(x)^2)''}{4c''(x)}\Big)' \quad \text{se} \quad c'' \neq 0 \quad [\text{MSS}]$$

$$\frac{dq}{dt} = \Big(\frac{q''}{q^3} - 3\frac{q'^2}{q^4} - \frac{(c(x)^2)''}{4c''(x)}\Big)' \quad \text{se} \quad c'' = 0, c' \neq 0 \quad [\text{MSS}]$$

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} = {} & \Big(\frac{q^{(4)}}{q^5} - 15\frac{q'q'''}{q^6} - 10\frac{q''^2}{q^6} + 105\frac{q''q'^2}{q^7} - 105\frac{q'^4}{q^8} + (2c(x) - \frac{1}{4}c''(x)x^2 + \frac{1}{2}c'(x)x)\frac{q''}{q^3} \\ & -(\frac{3}{2}c'(x)x + 6c(x) - \frac{3}{4}c''(x)x^2)\frac{q'^2}{q^4} + 5c'(x)\frac{q'}{q^3} - \frac{5}{4}\frac{c''(x)}{q^2} - \frac{15}{16}c(x)^2 + \frac{9}{16}c(x)c''(x)x^2 \\ & -\frac{9}{8}c(x)c'(x)x + \frac{3}{64}c''(x)^2x^4 - \frac{3}{16}c'(x)c''(x)x^3 + \frac{3}{16}c'(x)^2x^2\Big)' \qquad (\text{nuovo})\end{aligned}$$

Teorema: La coppia $H = H^{[9,c(x)]}$, $K = \frac{d^3}{dx^3}$ dà il sistema integrabile:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} = {} & \Big(\frac{q^{(4)}}{q^5} - 15\frac{q'q'''}{q^6} - 10\frac{q''^2}{q^6} + 105\frac{q''q'^2}{q^7} - 105\frac{q'^4}{q^8} + 20c'(x)\frac{q'^2}{q^5} - 5c'(x)\frac{q''}{q^4} + 5c'(x)^2\frac{1}{q^2} \\ & -20c(x)c'(x)\frac{q'}{q^3} + 15c(x)^2\frac{q'^2}{q^4} - 5c(x)^2\frac{q''}{q^3} - 5c(x)^4\Big)' \qquad (\text{nuovo})\end{aligned}$$

Congett.: Le coppie $(\tilde{H}_{(11,c(x),0)}, \tilde{H}_{(11,c(x),\infty)})$ e $(\tilde{\tilde{H}}_{[11,c(x),0]}, \tilde{\tilde{H}}_{(11,c(x),\infty)})$ producono due nuove equazioni integrabili.

Risultati (parziali)

Teorema: La coppia $H = H_{(7,c(x))}$, $K = \frac{d^3}{dx^3}$ dà i sistemi integrabili:

$$\frac{dq}{dt} = \Big(\frac{q''}{q^3} - 3\frac{q'^2}{q^4} - \frac{(c(x)^2)''}{4c''(x)}\Big)' \quad \text{se } c'' \neq 0 \quad \text{[MSS]}$$

$$\frac{dq}{dt} = \Big(\frac{q''}{q^3} - 3\frac{q'^2}{q^4} - \frac{(c(x)^2)''}{4c''(x)}\Big)' \quad \text{se } c'' = 0, c' \neq 0 \quad \text{[MSS]}$$

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} = \Big(&\frac{q^{(4)}}{q^5} - 15\frac{q'q'''}{q^6} - 10\frac{q''^2}{q^6} + 105\frac{q''q'^2}{q^7} - 105\frac{q'^4}{q^8} + (2c(x) - \frac{1}{4}c''(x)x^2 + \frac{1}{2}c'(x)x)\frac{q''}{q^3}\\ &-(\frac{3}{2}c'(x)x + 6c(x) - \frac{3}{4}c''(x)x^2)\frac{q'^2}{q^4} + 5c'(x)\frac{q'}{q^3} - \frac{5}{4}\frac{c''(x)}{q^2} - \frac{15}{16}c(x)^2 + \frac{9}{16}c(x)c''(x)x^2\\ &-\frac{9}{8}c(x)c'(x)x + \frac{3}{64}c''(x)^2x^4 - \frac{3}{16}c'(x)c''(x)x^3 + \frac{3}{16}c'(x)^2x^2\Big)' \quad \text{(nuovo)}\end{aligned}$$

Teorema: La coppia $H = H^{[9,c(x)]}$, $K = \frac{d^3}{dx^3}$ dà il sistema integrabile:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} = \Big(&\frac{q^{(4)}}{q^5} - 15\frac{q'q'''}{q^6} - 10\frac{q''^2}{q^6} + 105\frac{q''q'^2}{q^7} - 105\frac{q'^4}{q^8} + 20c'(x)\frac{q'^2}{q^5} - 5c'(x)\frac{q''}{q^4} + 5c'(x)^2\frac{1}{q^2}\\ &-20c(x)c'(x)\frac{q'}{q^3} + 15c(x)^2\frac{q'^2}{q^4} - 5c(x)^2\frac{q''}{q^3} - 5c(x)^4\Big)' \quad \text{(nuovo)}\end{aligned}$$

Congett.: Le coppie $(\tilde{H}_{(11,c(x),0)}, \tilde{H}_{(11,c(x),\infty)})$ e $(\tilde{\tilde{H}}_{[11,c(x),0]}, \tilde{\tilde{H}}_{(11,c(x),\infty)})$ producono due nuove equazioni integrabili.

Congettura: ogni equazione biHamiltoniana integrabile è equivalente (a meno di trasformazioni di contatto) ad una delle precedenti

The End