

## Seminario di Geometria ed Algebra

Martedì 20 Gennaio, 2004  
Università La Sapienza  
aula di Consiglio, 3:00–4:00 pm

### **Algebre di vertice conformi**

#### Sommario

- idee fisiche
- algebre conformi e algebre di vertice
- algebre conformi "non-lineari"
- classificazione di algebre di vertice conformi finitamente generate

Lucidi a disposizione presso il sito web:

<http://www.math.harvard.edu/~desole/>

## Riassunto di teoria quantistica dei campi

Lo spazio degli stati è uno spazio di Hilbert  $V$ .

Lo stato di vuoto è un elemento  $|0\rangle \in V$ .

Le osservabili fisiche sono distribuzioni a valori operatori,  $\Phi(x) \in \text{End}V$ , detti campi quantistici.

### Principio di relatività:

*Nessun segnale può viaggiare a velocità superiore alla velocità della luce  $c = 1$ .*

Se  $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$  sono a distanza di tipo spaziale,

$$|x - y|^2 < 0 \quad (\Leftrightarrow v = |x_1 - y_1|/|x_0 - y_0| > 1)$$

le osservabili  $\Phi(x)$  e  $\Psi(y)$  sono indipendenti.

### Principio di indeterminazione:

Se due osservabili  $\Phi(x)$  e  $\Psi(y)$  sono indipendenti, allora:

$$[\Phi(x), \Psi(y)] = 0$$

### Specializzazione in dimensione $d + 1 = 2$

Effettuiamo un cambio di variabili:

$$z = x_0 - x_1 \quad \bar{z} = x_0 + x_1, \quad \Rightarrow \quad |x|^2 = z\bar{z}$$

I principi di **relatività + indeterminazione** implicano l'**equazione di località**:

$$(z-w)(\bar{z}-\bar{w}) < 0 \quad \Rightarrow \quad [\Phi(z, \bar{z}), \Psi(w, \bar{w})] = 0 \quad (*)$$

#### Campi chirali

Un campo  $\Phi(z, \bar{z})$  è detto **campo chirale** se dipende solo da  $z$  e non da  $\bar{z}$ :

$$\partial_{\bar{z}}\Phi(z, \bar{z}) = 0$$

L'**equazione di località** (\*) per campi chirali si riscrive:

$$z - w \neq 0 \quad \Rightarrow \quad [\Phi(z), \Psi(w)] = 0$$

Cioè il commutatore  $[\Phi(z), \Psi(w)]$  è concentrato sulla diagonale  $z = w$ . Una formulazione equivalente dell'equazione di località è data da:

$$(z - w)^N [\Phi(z), \Psi(w)] = 0$$

### Operatori di creazione e distruzione

Un campo chirale si scrive come serie (formale):

$$\Phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi_n z^n, \quad \Phi_n \in \text{End}V$$

$\Phi_n$ ,  $n < 0$  sono **operatori di distruzione** ( $v \in V$ ):

$$\Phi_n |0\rangle = 0, \quad \forall n < 0 \quad ; \quad \Phi_n v = 0, \quad \forall n \ll 0,$$

$\Phi_n$ ,  $n \geq 0$  sono **operatori di creazione**:

$$\Phi_n |0\rangle = |\Phi_n\rangle \neq 0, \quad \forall n \geq 0$$

Equivalentemente,  $\Phi(z)|0\rangle$  è una *serie di Taylor* in  $z$  (solo potenze non negative di  $z$ ), mentre  $\Phi(z)v$ ,  $v \in V$  è una *serie di Laurent* in  $z$  (con un numero finito di potenze negative in  $z$ )

## Algebre di vertice

$V$ : spazio vettoriale,  $|0\rangle \in V$ .

**Def 1** Un **campo**  $\Phi(z)$  su  $V$  è una serie formale in  $z$  con coefficienti in  $\text{End}V$ :

$$\Phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi_n z^n \in \text{End}V[[z, z^{-1}]]$$

tale che  $\Phi(z)|0\rangle$  è una serie di Taylor in  $z$ , e  $\Phi(z)v$  è una serie di Laurent in  $z$  per ogni  $v \in V$ .

**Def 2** Due campi  $(\Phi(z), \Psi(w))$  sono detti **locali** se soddisfano l'equazione di località

$$(z-w)^N [\Phi(z), \Psi(w)] = 0 \quad \text{per } N \gg 0$$

**Definizione** Un **algebra di vertice** è (piú o meno) una collezione

$$\mathcal{F} = \{\Phi^\alpha(z), \alpha \in \mathcal{A}\}$$

di **campi a due a due locali**.

## Esempi

### Esempio 1: correnti

$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}K$ : algebra di Kac–Moody affine,  
con bracket di Lie

$$[at^m, bt^n] = [a, b]t^{m+n} + m\delta_{m, -n}(a|b)K$$

**Campi** (su una rappr.  $V$  di  $\hat{\mathfrak{g}}$  di peso massimo):

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (at^n)z^{-n-1}, \quad a \in \mathfrak{g}$$

**Località**, garantita da **Operator Prod. Expansion**:

$$[a(z), b(w)] = [a, b](w)\delta(z-w) + (a|b)K\partial_w\delta(z-w)$$

### Esempio 2: Virasoro

$Vir = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}K$ , algebra di Virasoro:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + c\frac{m^3-m}{12}\delta_{m, -n}K$$

**Campo locale** (su una rappr.  $V$  di  $Vir$  di peso massimo):  $L(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}$ , con **OPE**:

$$[L(z), L(w)] = (L'(w) + 2L(w)\partial_w + \frac{1}{2}c\partial_w^3)\delta(z-w)$$

## Struttura algebrica di una v.a.

Derivata  $(T\Phi)(z) = \partial_z \Phi(z)$

O.P.E e  $\lambda$ -bracket

Località è equiv. all' **Opeator Product Expansion**

$$[\Phi(z), \Psi(w)] = \sum_{n=0}^N c_n(w) \partial_w^n \delta(z-w)$$

Il  **$\lambda$ -bracket** è la trasformata di Fourier dell' OPE:

$$[\Phi \ \lambda \ \Psi](z) = \sum_{n=0}^N \frac{\lambda^n}{n!} c_n(z)$$

Il prodotto normalmente ordinato

Un campo  $\Phi(z)$  si decompone in **parte di creazione**  $\Phi_+(z)$  e **parte di distruzione**  $\Phi_-(z)$

$$\Phi_+(z) = \sum_{n < 0} \Phi_n z^{-n-1}, \quad \Phi_-(z) = \sum_{n \geq 0} \Phi_n z^{-n-1}$$

Il **prodotto normalmente ordinato** è definito da:

$$:\Phi\Psi:(z) = \Phi_+(z)\Psi(z) + \Psi(z)\Phi_-(z)$$

### Lemma di Dong

$\mathcal{F}$ , collezione di campi a due a due locali.  
 $\bar{\mathcal{F}}$ , ottenuta aggiungendo tutte le derivate, i  $\lambda$ -bracket ed i prodotti normalmente ordinati di campi in  $\mathcal{F}$ :

$$\bar{\mathcal{F}} \ni \{\Phi, T\Phi, c_n, : \Phi\Psi :\}$$

Allora,  $\bar{\mathcal{F}}$  è di nuovo una collezione di **campi a due a due locali**.

### Conclusione

Possiamo assumere che  $\mathcal{F}$  è chiusa rispetto a derivata,  $\lambda$ -bracket e prodotto ordinato:

$$\begin{aligned}\Phi &\mapsto T\Phi \in \mathcal{F} \\ \Phi, \Psi &\mapsto [\Phi \lambda \Psi] \in \mathcal{F}[\lambda] \\ \Phi, \Psi &\mapsto : \Phi\Psi : \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

**Teorema** (Bakalov, Kac ~ 2001)

Le seguenti proprietà sono necessarie e sufficienti per avere una collezione di campi locali:

- sesquilinearità

$$[T\Phi_\lambda \Psi] = -\lambda[\Phi_\lambda \Psi]$$

$$[\Phi_\lambda T\Psi] = (\lambda + T)[\Phi_\lambda \Psi]$$

- anti-simmetria

$$[\Psi_\lambda \Phi] = -[\Phi_{-\lambda-T} \Psi]$$

- identità di Jacobi

$$[\Phi_\lambda [\Psi_\mu \chi]] - [\Psi_\mu [\Phi_\lambda \chi]]$$

$$= [[\Phi_\lambda \Psi]_{\lambda+\mu} \chi]$$

- regola di Leibniz

$$T : \Phi\Psi : = : (T\Phi)\Psi : + : \Phi(T\Psi) :$$

- quasi-associatività

$$\begin{aligned}
 & : (\Phi \Psi) \chi : - : \Phi (\Psi \chi) : = \\
 & : \left( \int_0^T d\lambda \Phi \right) [\Psi \lambda \chi] : + : \left( \int_0^T d\lambda \Psi \right) [\Phi \lambda \chi] :
 \end{aligned}$$

- anti-simmetria del prodotto ordinato

$$: \Phi \Psi : - : \Psi \Phi : = \int_{-T}^0 d\lambda [\Phi \lambda \Psi]$$

- formula di Wick non commutativa

$$\begin{aligned}
 [\Phi \lambda : \Psi \chi :] & = : [\Phi \lambda \Psi] \chi : + : \Psi [\Phi \lambda \chi] : \\
 & + \int_0^\lambda d\mu [[\Phi \lambda \Psi] \mu \chi] .
 \end{aligned}$$

**Definizione** (Kac ~ 1995)

Un' **algebra di Lie conforme**  $R$  è uno spazio vettoriale dotato di un endomorfismo  $T \in \text{End}R$  ed un  $\lambda$ -bracket

$$\Phi \otimes \Psi \mapsto [\Phi \lambda \Psi] \in R[\lambda]$$

soddisfacente i seguenti assiomi

**Definizione** Un' **algebra di vertice** è uno spazio vettoriale  $V$ , un elemento  $|0\rangle \in V$ , un endomorfismo  $T \in \text{End}R$ , e due operazioni:

A) un  **$\lambda$ -bracket**  $[\Phi \lambda \Psi]$ , che lo rende un' **algebra di Lie conforme**

B) un **prodotto normalmente ordinato**  $:\Phi\Psi:$ , che lo rende un' **algebra differenziale con unità**  $|0\rangle$ .

Soddisfano i seguenti assiomi:

**Definizione** (Kac ~ 1995)

Un' **algebra di Lie conforme**  $R$  è uno spazio vettoriale dotato di un endomorfismo  $T \in \text{End}R$  ed un  $\lambda$ -bracket

$$\Phi \otimes \Psi \mapsto [\Phi \lambda \Psi] \in R[\lambda]$$

soddisfacente i seguenti assiomi

- **sesquilinearità**

$$[T\Phi \lambda \Psi] = -\lambda[\Phi \lambda \Psi]$$

$$[\Phi \lambda T\Psi] = (\lambda + T)[\Phi \lambda \Psi]$$

- **anti-simmetria**

$$[\Psi \lambda \Phi] = -[\Phi \lambda -T \Psi]$$

- **identità di Jacobi**

$$\begin{aligned} [\Phi \lambda [\Psi \mu \chi]] - [\Psi \mu [\Phi \lambda \chi]] \\ = [[\Phi \lambda \Psi] \lambda + \mu \chi] \end{aligned}$$

**Definizione** Un' **algebra di vertice** è uno spazio vettoriale  $V$ , un elemento  $|0\rangle \in V$ , un endomorfismo  $T \in \text{End}R$ , e due operazioni:

A) un  **$\lambda$ -bracket**  $[\Phi \lambda \Psi]$ , che lo rende un' **algebra di Lie conforme**

B) un **prodotto normalmente ordinato**  $:\Phi\Psi:$ , che lo rende un' **algebra differenziale con unità**  $|0\rangle$ .

Soddisfano i seguenti assiomi:

- **quasi-associatività**

$$\begin{aligned} & :(\Phi\Psi)\chi: - :\Phi(\Psi\chi): = \\ & : \left( \int_0^T d\lambda \Phi \right) [\Psi \lambda \chi] : + : \left( \int_0^T d\lambda \Psi \right) [\Phi \lambda \chi] : \end{aligned}$$

- **anti-simmetria** del prodotto ordinato

$$:\Phi\Psi: - :\Psi\Phi: = \int_{-T}^0 d\lambda [\Phi \lambda \Psi]$$

- **formula di Wick non commutativa**

$$\begin{aligned} [\Phi \lambda : \Psi \chi :] & = : [\Phi \lambda \Psi] \chi : + : \Psi [\Phi \lambda \chi] : \\ & + \int_0^\lambda d\mu [[\Phi \lambda \Psi] \mu \chi] . \end{aligned}$$

### Definizione

Un' **algebra di Lie differenziale**  $R$  è uno spazio vettoriale dotato di un endomorfismo  $T \in \text{End}R$  ed un Lie-bracket

$$\Phi \otimes \Psi \mapsto [\Phi, \Psi] \in R$$

soddisfacente i seguenti assiomi

- **regola di Leibniz**

$$T[\Phi, \Psi] = [T\Phi, \Psi] + [\Phi, T\Psi]$$

- **anti-simmetria**

$$[\Psi, \Phi] = -[\Phi, \Psi]$$

- **identità di Jacobi**

$$\begin{aligned} & [\Phi, [\Psi, \chi]] - [\Psi, [\Phi, \chi]] \\ &= [[\Phi, \Psi], \chi] \end{aligned}$$

**Definizione** Un' **algebra associativa differenziale con unita'** è uno spazio vettoriale  $V$ , un elemento  $|0\rangle \in V$ , un endomorfismo  $T \in \text{End}R$ , e due operazioni:

A) un **Lie-bracket**  $[\Phi, \Psi]$ , che lo rende un' **algebra di Lie differenziale**

B) un **prodotto associativo**  $\Phi \cdot \Psi$ , che lo rende un' **algebra differenziale con unita'  $|0\rangle$** .

Soddisfano i seguenti assiomi:

- **associatività**

$$(\Phi \cdot \Psi) \cdot \chi - \Phi \cdot (\Psi \cdot \chi) = 0$$

- **anti-simmetria** del prodotto associativo

$$\Phi \cdot \Psi - \Psi \Phi = [\Phi, \Psi]$$

- **regola di Leibniz**

$$[\Phi, \Psi \cdot \chi] = [\Phi, \Psi] \cdot \chi + \Psi \cdot [\Phi, \chi]$$

Ulteriori analogie:

1) Algebra di vertice  $\Rightarrow$  Algebra di Lie conforme

Per def., un algebra di vertice è anche un' algebra di Lie conforme, e vale la relazione

$$:\Phi\Psi:-:\Psi\Phi:=\int_{-T}^0 d\lambda[\Phi_\lambda\Psi]$$

2) Algebra di Lie conforme  $\Rightarrow$  Algebra di vertice

Data un'algebra di Lie conforme  $R$ , esiste ed è unica l' algebra di vertice involupante universale  $U(R)$  e vale il teorema PBW: una base di  $U(R)$  è costituita dai monomi ordinati

$$:\Phi_{i_1}\cdots\Phi_{i_s}:-, \quad i_1\leq\cdots\leq i_s$$

## Esempi di algebre di Lie conformi

**Esempio 1.**  $\mathfrak{g}$ : algebra di Lie semplice, con una forma bilineare, simmetrica, invariante  $(a, b)$ . L' **algebra conforme di correnti** è

$$\text{Curg} = (\mathbb{C}[T] \otimes \mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}|0\rangle$$

con  $\lambda$ -bracket dato da  $(|0\rangle$  centrale)

$$[a \ \lambda \ b] = [a, b] + \lambda k(a, b)|0\rangle, \quad a, b \in \mathfrak{g}$$

$k \in \mathbb{C}$  è detto **livello di Kac-Moody**.

**Esempio 2.** L' **algebra conforme di Virasoro** è

$$\text{Vir} = (\mathbb{C}[T]L) \oplus \mathbb{C}|0\rangle$$

con  $\lambda$ -bracket

$$[L \ \lambda \ L] = (T + 2\lambda)L + \frac{c}{12}\lambda^3|0\rangle$$

$c \in \mathbb{C}$  è detta **carica centrale**.

**Osservazione** Le algebre involuanti universali  $V(\text{Curg})$  e  $V(\text{Vir})$  sono le algebre di vertice descritte prima.

## Algebre conformi non-lineari

### Problema:

Non tutte le algebre di vertice  $V$  sono  $\simeq U(R)/I$ , per qualche algebra di Lie conforme  $R$ .

(a) algebre di Lie conf. (semp., finite) sono classificate (D'Andrea-Kac, 1998, e Fattori-Kac, 2002)

(b) la classificazione di algebre di vertice (in qualunque senso) è completamente aperta.

### Idea:

Nozione di **algebra di Lie conforme "non-lineare"**.

Duplicato risultato:

(i) data un alg di Lie conf non-lin,  $\exists!$  l'algebra di vertice invil univ  $U(R)$  (e vale un teorema PBW),

(ii) (quasi) **tutte le algebre di vertice sono**  $\simeq U(R)/I$  per qualche alg di Lie conf non-lin.

### In conclusione:

Classificare le algebra di vertice è (quasi) equival a **classificare le alg conf non-lineari**.

**Definizione** Un **algebra di Lie non-lineare** è uno spazio vettoriale graduato  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\Delta \geq 1} \mathfrak{g}_\Delta$  dotato di

$$[ , ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{\otimes 2} \oplus \dots$$

soddisfacente le seguenti condizioni:

- **rispetto della gradazione**

$$\Delta([\Phi, \Psi]) \leq \Delta(\Phi) + \Delta(\Psi) - 1$$

- **anti-simmetria**

$$[\Psi, \Phi] = -[\Phi, \Psi]$$

- **identità di Jacobi**(\*)

$$[\Phi, [\Psi, \chi]] - [\Psi, [\Phi, \chi]] - [[\Phi, \Psi], \chi] \in \mathcal{M}_\Delta(\mathfrak{g})$$

per  $\Delta \leq \Delta(\Phi) + \Delta(\Psi) + \Delta(\chi) - 1$ , dove

$$\mathcal{M}_\Delta(\mathfrak{g}) = \left\{ \begin{array}{l} A \otimes (b \otimes c - c \otimes b - [b, c]) \otimes D \\ \Delta(A \otimes b \otimes c \otimes D) \leq \Delta \end{array} \right\}$$

(Notazione:  $b, c \in \mathfrak{g}, A, D \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ )

**Risultato:**  $U(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}(\mathfrak{g})/\mathcal{M}(\mathfrak{g})$  è un' algebra associativa involupante universale e vale il

**Teorema PBW.**

### **Teorema 1**

Sia  $R$  un' algebra di Lie conforme non-lineare.

1. Esiste (ed è unica) l' algebra di vertice invol. univ.  $U(R) = \mathcal{T}(R)/\mathcal{M}(R)$ ,
2. il Teorema PBW vale, cioè una base di  $U(R)$  è

$$\{:\Phi_{i_1} \cdots \Phi_{i_n} : , \quad i_1 \leq \cdots \leq i_n\}$$

### **Teorema 2**

Sia  $V$  un algebra di vertice graduata

"non-degenere", generata liberamente da  $R \subset V$  (cioè tale che il Teorema PBW vale). Allora  $R$  è dotato della struttura di algebra di Lie conforme non-lineare.

### **Conclusione:**

Le algebra di vertice graduate non-degeneri sono "categoricamente equivalenti" alle algebre di Lie conformi non-lineari.

## Applicazione: classificazione di v.a.

### Problema

Classificare le algebre di vertice (non-degeneri)  $V$  finitamente generate da un sottospazio

$$R = \mathbb{C}|0\rangle \oplus \mathbb{C}[T](\mathfrak{g} \oplus U \oplus \mathbb{C}L)$$

dove

- $L$  è un elemento di Virasoro,
- $\mathfrak{g}$  è uno spazio di correnti (campi primari pari di peso conforme 1),
- $U$  è uno spazio di campi primari dispari di peso conforme  $3/2$ .

### Definizione

$L$  è un **elem. di Virasoro** di **carica centrale**  $c$  se

1.  $[L_\lambda L] = (T + 2\lambda)L + \frac{c}{2}\lambda^3|0\rangle$ ,
2.  $L_{-1} = [L_\lambda \cdot] \Big|_{\lambda=0} = T$ ,
3.  $L_0 = \frac{d}{d\lambda}[L_\lambda \cdot] \Big|_{\lambda=0}$  è diagonalizzabile in  $V$ .

### Osservazione

Dato un'elem. di Virasoro  $L$ , c'è una rapp. dell'**algebra di Virasoro** su  $V$ , data da ( $m \geq 0$ ):

$$L_{m-1} = \frac{d^m}{d\lambda^m}[L_\lambda \cdot] \Big|_{\lambda=0}, \quad L_{-m-2} = \frac{1}{m!} : (T^m L) \cdot :$$

### Definizione

Gli autovalori di  $L_0$  sono detti **pesi conformi**.

Ovvero  $a \in V$  ha peso conforme  $\Delta$  se

$$[L_\lambda a] = Ta + \Delta\lambda a + O(\lambda^2)$$

Un elem.  $a \in V$  è detto **campo primario** se

$$[L_\lambda a] = Ta + \Delta\lambda a$$

O, equivalentemente,  $L_n(a) = 0$  for  $n > 0$ .

### Osservazione preliminare

$V$  è **graduata** dal peso conforme. Dunque, se  $V$  è **non-degenere**, allora  $R = \mathbb{C}[T](\mathfrak{g} \oplus U \oplus \mathbb{C}L)$  è un' **algebra di Lie conf. non-lineare**.

### Proposizione

$R$  è un' **algebra di Lie conforme non-lineare** se e solo se:

- $\mathfrak{g}$  è un' **algebra di Lie**,
- $U$  è **modulo su  $\mathfrak{g}$** ,
- esistono  $c \in \mathbb{C}$  e **omomorfismi di moduli su  $\mathfrak{g}$** ,  
 $\varkappa : S^2\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $Q : S^2U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  
 $K : \Lambda^2U \rightarrow \mathfrak{g}$ ,  $P : S^2U \rightarrow S^2\mathfrak{g}$ ,  
che soddisfano **alcune equazioni (\*\*)**

### Conclusione

Classificare le **algebra di vertice non-degeneri** è equivalente a classificare le 7-ple  $(\mathfrak{g}, U, c, \varkappa, Q, K, P)$  tali che le equazioni (\*\*\*) sono soddisfatte.

### Teorema 3

La classific. di alg. di Lie conf. non-lineari  $R$ , con  $\mathfrak{g}$  riduttiva, che ammettono limite quasi-classico<sup>1</sup> (per  $\mathfrak{g}$  semplice,  $U$  irriducibile, tale ipotesi non è necessaria), è la seguente:

$\mathfrak{g}$	$U$
$\mathfrak{so}_n$	$\mathbb{C}^n, n \geq 3, n \neq 4$
$B_3$	$\pi_3$
$G_2$	$\pi_1$
$\mathfrak{sl}_2$	$\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$
$\mathfrak{gl}_n$	$\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{n,*}, n \neq 2$
$\mathfrak{sp}_n \oplus \mathfrak{sp}_2$	$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2, n \geq 2$

<sup>1</sup>**Def.**  $R$  ammette limite quasi-classico se l'algebra simmetrica  $S(R)$  ammette una struttura compatibile di algebra di vertice di Poisson.

### Osservazione

Il Teorema 3 risolve il problema di classificazione delle **algebre di vertice non-degeneri**. Ad ogni coppia  $(\mathfrak{g}, U)$  corrisponde una famiglia di algebre di vertici con **valore arbitrario della carica centrale**  $c$  (e del livello di Kac–Moody  $k$ ).

### **Teorema 4**

Per  $\mathfrak{g}$  semplice e  $U$  irriducibile le **algebre di vertice degeneri** sono classificate<sup>2</sup> ed hanno le seguenti proprietà:

1. non ammettono limite quasi-classico
2. la carica centrale  $c$  ed il livello di Kac–Moody  $k$  hanno **valori "discreti"**