Settimo foglio

Notazione: $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; T_a traslazione del piano di vettore a; $R_{p,\theta}$ rotazione del piano intorno al punto p di angolo θ; S_ℓ riflessione ortogonale rispetto alla retta ℓ; $S_{\ell,v}$ glissoriflessione rispetto alla retta ℓ e vettore di traslazione v (parallelo a ℓ).

Esercizio 7.1. Sia $M \in \mathcal{M}_2$ un movimento rigido del piano che cambia l'orientazione. Provare che M^2 è una traslazione.

Esercizio 7.2. Determinare la funzione biunivoca $\mathbb{R}^2 \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \times (0, 2\pi)$, $(p, \theta) \mapsto (a, \alpha)$, tale che

$$R_{p,\theta} = T_a \circ R_\alpha \,.$$

Esercizio 7.3. Verificare che la funzione biunivoca

$$\{(\ell, v) \mid \ell \subset \mathbb{R}^2 \text{ retta del piano}\,, v \in \mathbb{R}^2 \text{ parallelo a } \ell\} \to \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi)\,,$$

$(\ell, v) \mapsto (a, \alpha)$, tale che

$$S_{\ell,v} = T_a \circ R_\alpha \circ S$$

è data dalla seguente formula: se ℓ è la retta $y = mx + q$, allora

$$a = v + \frac{2q}{1+m^2} \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad \alpha = 2 \arctan m \,.$$

(Non garantiamo la correttezza di queste formule: in caso fossero sbagliate trovare quelle corrette.)

Esercizio 7.4. Denotiamo $R_{p,\theta} \in \mathcal{M}_2$ la rotazione del piano intorno al punto p di angolo θ. Determinare le condizioni su p, θ, q, η per cui la composizione $R_{p,\theta} \circ R_{q,\eta}$ sia una traslazione. Nel caso di angoli supplementari ($\theta + \eta = \pi$), avendo già verificato che $R_{p,\theta} \circ R_{q,\eta}$ è una rotazione, determinare il punto intorno al quale avviene la rotazione in funzione di p, q e θ.

Esercizio 7.5. Denotiamo $S_{\ell,v} \in \mathcal{M}_2$ la glissoriflessione del piano con asse di riflessione ℓ e vettore di traslazione v (parallelo a ℓ). Determinare le condizioni su ℓ, u, r, v per cui la composizione $S_{\ell,v} \circ S_{r,u}$ sia una traslazione.

Esercizio 7.6. Sia $C_n(p) = \langle R_{p,\frac{2\pi}{n}} \rangle \subset \mathcal{M}_2$. Dimostrare che i sottogruppi $C_n(p)$, al variare di $p \in \mathbb{R}^2$, sono isomorfi al gruppo ciclico C_n e sono tutti coniugati tra loro: per ogni $p, q \in \mathbb{R}^2$, esiste $g \in \mathcal{M}_2$ tale che

$$C_n(p) = g C_n(q) g^{-1} \,.$$

Fare la stessa cosa con $D_n(p, \ell) = \langle R_{p,\frac{2\pi}{n}}, S_\ell \rangle$, dove ℓ è una retta del piano e $p \in \ell$.