

6 Sesto foglio

Esercizio 6.1. Siano $a, m, n \in \mathbb{N}$ con $a > 1$. Mostrare che se $MCD(m, n) = d$, allora $MCD(a^m - 1, a^n - 1) = a^d - 1$.

Esercizio 6.2. Mostrare che se $2^n - 1$ è primo allora n è primo.

Esercizio 6.3. Siano $a > 1, n > 1$ interi. Mostrare che se $a^n - 1$ è primo, allora $a = 2$ e n è primo.

Esercizio 6.4. Siano $a > 1, n > 1$ interi. Mostrare che se $a^n + 1$ è primo, allora a è pari e n è una potenza di 2.

Esercizio 6.5. Dimostrare che se p è primo e $p \equiv 1 \pmod{4}$, allora $\left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Esercizio 6.6 (Gruppi di simmetria delle figure piane). Determinare il gruppo delle simmetrie (isometriche) delle seguenti figure piane:

1. rettangolo.
2. rombo.
3. parallelogrammo.
4. triangolo equilatero.
5. triangolo isoscele.
6. quadrato.
7. poligono regolare di n lati.
8. un ellisse.
9. una iperbole.
10. una circonferenza.