4 Quarto foglio

Esercizio 4.1 (gruppi di automorfismi). Determinare i gruppi degli automorfismi interni e degli automorfismi totali dei seguenti gruppi:

1. $\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}_n$ inteso come gruppo additivo.
3. D_4
4. Q_8
5. A_4

Esercizio 4.2 (sequenza esatta corta). Una sequenza esatta corta è composta da due morfismi fra tre gruppi $i : H \to G, \pi : G \to K$ in cui il primo è iniettivo mentre il secondo è suriettivo, tali che $Imm(i) = ker(\pi)$.

1. Provare che $Imm(i) \simeq H$, che è normale in G e che $G/H = K$
2. Provare che si può scrivere come prodotto semidiretto fra i due se e solo se esiste un morfismo $j : K \to G$ tale che $\pi \circ j = id_K$. Nel gergo si dice che la sequenza si spezza.

Esercizio 4.3. Dati K, H gruppi, un prodotto semidiretto è definito tramite un morfismo $\phi : K \to Aut(H)$. Dimostrare che presi due morfismi $\phi, \psi : K \to Aut(H)$, se esite un automorfismo di K,$f \in Aut(K)$ ed un automorfismo di $H, g \in Aut(H)$ tali che per ogni $k \in K$ valga $g\phi_{f(k)} = \psi_k g$ allora $K \ltimes_\phi H = K \ltimes_\psi H$.

Esercizio 4.4. Descrivere i seguenti gruppi come prodotti semidiretti o dire quando non è possibile farlo:

1. $\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z}_{nm}$ inteso com prodotto fra $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m$
3. D_n
4. S_3
5. A_4

Esercizio 4.5 (prodotti commutativi e associativi). Mostrare che il prodotto diretto è "commutativo ed associativo", ovvero che dati tre gruppi G, H, K vale che:

$$(G \times H) \times K \simeq G \times (H \times K), \quad G \times H \simeq H \times G$$

Provare invece con degli esempi che le stesse proprietà non valgono per il prodotto semidiretto.