10 Decimo foglio

Esercizio 10.1. Sia G un gruppo finito, N un suo sottogruppo normale, p un numero primo e P un $p-$Sylow di G. Dimostrare che:

1. $P \cap N$ è un $p-$Sylow di N.
2. PN/N è un $p-$Sylow di G/N.

Esercizio 10.2. Siano $p < q < r$ numeri primi e sia G un gruppo con cardinalità pqr. Dimostrare che esiste un Sylow normale.

Esercizio 10.3. Sia $H < G$, definiamo gli insiemi centralizzatore e normalizzatore di H in G come:

$$C_G(H) = \left\{g \in G | ghg^{-1} = h \ \forall h \in H\right\}$$

$$N_G(H) = \left\{g \in G | ghg^{-1} \in H \ \forall h \in H\right\}$$

1. Dimostrare che sono entrambi sottogruppi di G.
2. Dimostrare che $C_G(H)$ è un sottogruppo normale di $N_G(H)$.
3. Costruire un morfismo iniettivo:

$$\frac{N_G(H)}{C_G(H)} \hookrightarrow Aut(H)$$

Esercizio 10.4. Sia p primo ed $n > 3$. Sia G un gruppo di ordine p^n con centro di ordine p.

1. Dimostrare che esiste $x \in G$ il cui centralizzatore ha ordine p^{n-1}.
2. Dimostrare che G ha un sottogruppo abeliano di ordine p^3

Esercizio 10.5 (teorema di classificazione dei gruppi abeliani finiti). Classificare i gruppi abeliani di ordine p^3 con p numero primo.

Esercizio 10.6. Sia R anello ed $x \in R$ tale che per qualche $n \in \mathbb{N}$ valga $x^n = 0$. Provare che $1 + x$ ed $1 - x$ sono invertibili.

Esercizio 10.7. Un anello R è detto *Booleano* se per ogni $a \in R$ vale che $a = a^2$. Provare che ogni anello booleano è commutativo.

Esercizio 10.8. Dato un anello R definiamo:

$$Nil(R) = \{x \in R | \exists n \in \mathbb{N} | x^n = 0\}$$

1. Provare che se R è commutativo allora $Nil(R)$ è un ideale.
2. Trovare un anello non commutativo in cui $Nil(R)$ non è un ideale.