

Algebra 1: esercizi

gabriele.danieli.peluso

September 2023

1 Primo foglio

Esercizio 1.1 (ESSENZIALE! Lista delle cose vere e false). Discutere la veridicità delle seguenti equivalenze, dimostrandole o dando controesempi, elencando condizioni sufficienti a renderle vere o discutendo quale verso è sempre vero:

1. $x \equiv_{ab} y \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv_b y \\ x \equiv_a y \end{cases}$
2. $x \equiv_a y \Leftrightarrow bx \equiv_a by$
3. $x \equiv_a y \Leftrightarrow bx \equiv_{ab} by$
4. $\begin{cases} x \equiv_a y \\ z \equiv_b v \end{cases} \Leftrightarrow az + bx \equiv_{ba} by + av$

Esercizio 1.2. Dati due sottogruppi $H, K < G$ provare che la loro intersezione è ancora un sottogruppo.

Esercizio 1.3. Determinare l'intersezione tra i sottogruppi $m\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}$ di \mathbb{Z}

Esercizio 1.4 (Gruppo ciclico C_n). Il gruppo ciclico di ordine n è anche noto nella forma \mathbb{Z}_n . Preso ad esempio $n = 12$

1. Dare una scrittura di C_{12} in termini di generatori e relazioni.
2. Quali e quanti sono i sottogruppi di C_{12} .

Esercizio 1.5 (Proprietà dell'ordine). Siano $x, y, z \in G$ gruppo. Rispondere alle seguenti domande con dimostrazioni o esempi.

1. Che legame c'è fra l'ordine di x e l'ordine di x^{-1} ?
2. Gli ordini di xyz , yzx ed zxy hanno qualcosa in comune? E con l'ordine di yxz hanno somiglianze?
3. Se x ha ordine n cosa si può dire dell'ordine di x^r ?
4. Se $xy = yx$ (nel gergo commutano) che legame c'è fra l'ordine del prodotto e l'ordine dei fattori?
5. Se x e y non commutano far vedere con un esempio che la relazione sopra non è necessariamente verificata.
6. Se x^r ha ordine n cosa si può dire sull'ordine di x . In generale se $x^m = id$ cosa si può dire sull'ordine di x ?

Esercizio 1.6 (gruppo opposto). Sia (G, \cdot) un gruppo, consideriamo l'insieme (G, \circ) , detto gruppo opposto, con operazione $a \circ b = b \cdot a$. Dimostrare che è effettivamente un gruppo e determinare un isomorfismo esplicito tra i gruppi (G, \cdot) e (G, \circ) .