Esercizi - foglio 17 (consegna 13 maggio)

Esercizio 17.1 Sia $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$. Trovare i polinomi minimi su $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ di:
(a) ζ_3, (b) ζ_6, (c) ζ_9, (d) ζ_{12}.

Esercizio 17.2 Determinare se i appartiene oppure no ai seguenti campi:
(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, (b) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-2})$, (c) $\mathbb{Q}(\alpha)$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$ risolve $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$.

Esercizio 17.3 Dire se il policono regolare di 9 lati può essere costruito con riga e compasso.

Esercizio 17.4 Sia α una radice di x^3+3x+1. Dire se α può essere costruito con riga e compasso.

Esercizio 17.5 Sia F un campo di caratteristica zero. Denotiamo con f' la derivata di un polinomio $f \in F[x]$ e sia g un polinomio irriducibile che divida f e f'. Dimostrare che g^2 divide f.

Esercizio 17.6 Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ le radici di un polinomio $f \in F[x]$ di grado n in un'estensione di campi K. Trovare la migliore stima possibile di un maggiorante per il grado $[F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : F]$.

Esercizio 17.7 In questo esercizio dimostriamo l'unicità della chiusura algebrica di un campo, nella seguente forma:

Teorema: sia $\mathbb{F}$ un campo e siano $\mathbb{K}$ e $\mathbb{K}'$ due sue chiusure algebriche, ovvero estensioni algebriche di $\mathbb{F}$ algebricamente chiuse. Allora esiste un ismomorfismo di campi $\mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ che agisce come l'identità su $\mathbb{F}$.
(*Suggerimento:* Considerare l'insieme S delle coppie $(\mathbb{L}, \iota)$, dove $\mathbb{L}$ è un campo intermedio $\mathbb{F} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ e $\iota : \mathbb{L} \to \mathbb{K}'$ è un omomorfismo di campi che restringe all'identità su $\mathbb{F}$. Su S considerare la relazione d'ordine parziale $(\mathbb{L}, \iota) < (\mathbb{H}, j)$ se $\mathbb{L} \subset \mathbb{H}$ e $j|_{\mathbb{L}} = \iota$. Applicare il Lemma di Zorn.)