Esercizi - foglio 15 (consegna 22 aprile)

Esercizio 12.1 Sia U il sottogruppo del gruppo abeliano $\mathbb{Z}^3$ generato dagli elementi $(3,1,2),(1,1,3),(2,1,6)$. Esibire una base v_1,v_2,v_3 di $\mathbb{Z}^3$ e interi positivi $d_1|d_2|d_3$ tali che U sia generato da d_1v_1,d_2v_2,d_3v_3.

Esercizio 12.2 Se $R=\mathbb{C}[x,y]$, sia $I\subseteq R$ l'ideale generato da x e y. Dire se I possieda una base come R-modulo.

Esercizio 12.3 L'*annullatore* di un R-modulo V è l'insieme $I=\{r\in R\,|\,rv=0 \text{ per ogni } v\in V\}$.

(i) Dimostrare che I è un ideale di R.

(ii) Determinare l'annullatore dei seguenti $\mathbb{Z}$-moduli:

$$(a)\quad V=\mathbb{Z}/(2)\times\mathbb{Z}/(3)\times\mathbb{Z}/(4)\,;\qquad (b)\quad V=\mathbb{Z}\,.$$

Esercizio 12.4 Dato un anello commutativo con unità R, descrivere gli ideali $I\subseteq R$ tali che l'R-modulo R/I sia libero, cioè possieda una base come R-modulo.

Esercizio 12.5 Sia R un anello commutativo con unità e sia V un R-modulo libero di rango finito. Dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti due affermazioni:

(a) Ogni insieme di generatori contiene una base.

(b) Ogni insieme linearmente indipendente può essere esteso ad una base.

Esercizio 12.6 Sia $\varphi:\ \mathbb{Z}^k\to\mathbb{Z}^k$ un omomorfismo dato dalla moltiplicazione per la matrice intera A. Dimostrare che l'immagine di φ è di indice finito in $\mathbb{Z}^k$ se e solo se A è non singolare e che, in tal caso, l'indice di $\mathrm{Im}(\varphi)$ in $\mathbb{Z}^k$ è pari a $|\det(A)|$.